FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES

Vol. 38

# FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA PARA ENSINO FUNDAMENTAL

RENATO BORGES GUERRA (org)

JEANE DO SOCORRO COSTA DA SILVA

MARIA JOSÉ DE FREITAS MENDES

Rede Nacional de Formação Continuada de Professores de Educação Básica (MEC/SEB)

PROGRAMA EDUCIMAT - FORMAÇÃO, TECNOLOGIAS E PRESTAÇÃO DE SERVIÇOS EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

**Presidente da República Federativa do Brasil**
Luis Inácio Lula da Silva

**Ministro da Educação**
Fernando Haddad

**Secretário Executivo**
José Henrique Paim Fernandes

**Secretário de Educação Básica**
Maria do Pilar Lacerda Almeida e Silva

**Diretora de Política da Educação Infantil e Ensino Fundamental**
Jeanete Beauchamp

**Coordenação Geral de Política de Formação de Professores (REDE)**
Roberta de Oliveira

**Universidade Federal do Pará**
**Reitor**
Alex Bolonha Fiúza de Mello

**Vice-Reitora**
Regina Fátima Feio Barroso

**Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação**
Roberto Dall' Agnol

**Pró-Reitor de Extensão**
Ney Cristina Monteiro de Oliveira

**Coordenação do Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica**
Terezinha Valim Oliver Gonçalves

**Coordenação Geral do Programa EDUCIMAT**
Terezinha Valim Oliver Gonçalves

Governo
Federal
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
NÚCLEO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
CENTRO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA

**EDUCIMAT: Formação, Tecnologia e Prestação de Serviços em Educação em Ciências e Matemáticas**
Curso de Formação Continuada em Educação Matemática para Professores de 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental

Volume 38

# Fundamentos de Matemática para Ensino Fundamental

Renato Borges Guerra (Org.)
Jeane do Socorro Costa da Silva
Maria José de Freitas Mendes

Educimat 20

Editora da UFPA

Belém - Pará - 2008

**Dados Internacional de Catalogação na Publicação (CIP)**
**Biblioteca Setorial do NPADC, UFPA**

Guerra, Renato Borges

G9347 Fundamentos de matemática para o ensino fundamental/ Renato Borges Guerra, Jeane do Socorro Costa da Silva, Maria José de Freitas Mendes. – Belém: EdUFPA, 2008.

(Obras completas EDUCIMAT; v.38)

ISBN 85-247-0292-3

ISBN 85-247-0317-2

1. MATEMÁTICA - Estudo e ensino. 2. MATEMÁTICA – Ensino fundamental. I. Silva, Maria de Fátima Vilhena da.II. Oliveira, Sued. III. Universidade Federal do Pará. Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico. IV. Título. V.Série..

CDD 19.ed. 510.01

**SUMÁRIO**

**O PROGRAMA EDUCIMAT: Formação, Tecnologias e Prestação de Serviços em Educação em Ciências e Matemáticas**

O Programa EDUCIMAT é coordenado e desenvolvido pelo NÚCLEO PEDAGÓGICO DE APOIO AO DESENVOLIMENTO CIENTÍFICO (NPADC) da Universidade Federal do Pará, que integra a Rede Nacional de Formação Continuada de Professores de Educação Básica (MEC/SEB), na qualidade de Centro de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica.

O Programa visa à formação continuada de professores para a Educação Matemática e Científica, no âmbito da Educação Infantil e Ensino Fundamental. Como estratégia de trabalho, prevê a formação/fortalecimento de grupos de ***professores tutores*** dos Centros Pedagógicos de Apoio ao Desenvolvimento Científico (CPADC) e municipais, por meio da constituição dos Grupos Pedagógicos de Apoio ao Desenvolvimento Científico (GPADCs) em nível de especialização lato sensu. Nessa perspectiva, colocam-se como princípios de formação, dentre outros: a reflexão sobre a própria prática, a formação da cidadania e a pesquisa no ensino, adotando-se como transversalidade a educação inclusiva, a educação ambiental e a educação indígena.

O Programa está proposto para quatro anos, iniciando-se no Estado do Pará, com possibilidades de expansão para outros estados, especialmente das regiões Norte, Nordeste e Centro-Oeste. Parcerias poderão ser estabelecidas para otimizar o potencial da região no que diz respeito à institucionalização da formação continuada de professores no âmbito da Educação Infantil, Séries Iniciais, Ciências e Matemáticas.

O Programa EDUCIMAT situa-se no Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico (NPADC/UFPA), no âmbito do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, assim como o Mestrado. O NPADC é unidade acadêmica dedicada à pesquisa, à pós-graduação e a educação continuada de professores de Ciências e Matemáticas, desde a educação infantil e séries iniciais até a pós-graduação lato e stricto sensu. Conta com a parceria da Secretaria Executiva de Estado de Educação, por meio do Convênio 024/98 e de Instituições de Ensino Superior integrantes do Protocolo das Universidades da Amazônia: Universidade da Amazônia (UNAMA), Centro de Estudos Superiores do Estado do Pará (CESUPA) e a Universidade do Estado do Pará (UEPA).

**Objetivos do Programa EDUCIMAT**

Contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem de Ciências e de Matemática no Estado do Pará e em outras regiões do país;

Formar professores especialistas na área de Ensino de Ciências e Matemáticas, para constituir Grupos Pedagógicos Municipais na área de Educação Matemática e Científica;

Formar e certificar professores de Ciências e Matemáticas da Educação Infantil e Fundamental nos Estados e Municípios, por meio da Educação a Distância;

Fortalecer os municípios, instituindo os GPADC como organismos municipais capazes de assegurar a tutoria da formação continuada de professores em cada município;

Buscar a parceria dos governos municipais, estaduais e de outras instituições, garantindo a produção e reprodução de materiais didáticos específicos.

**Linhas de Ação do EDUCIMAT**

1. Desenvolvimento de programas e cursos de formação continuada, em rede, e de professores da Educação Infantil e Fundamental, de natureza semi-presencial e a distância nos municípios, incluindo elaboração de materiais didáticos, tais como módulos, livros, softwares e vídeos;
2. Realização de programa de formação de tutores, em nível de pós-graduação lato sensu, para o desenvolvimento de programas e cursos de formação continuada de professores e lideranças acadêmicas locais;
3. Desenvolvimento de tecnologias educacionais (software, kits, cd-rom) para o ensino infantil e fundamental, no âmbito dos municípios e unidades educacionais públicas;
4. Associação a outras instituições de ensino superior e outras organizações para a oferta de programas de formação continuada, formação de grupos de estudos e pesquisas e implantação de redes e novas tecnologias educacionais.

**Estratégias para o desenvolvimento do Programa**

Formação de Pólos para o desenvolvimento do Programa EDUCIMAT, por meio de momentos presenciais e a distância;

Realização de Seminários e Encontros com a participação da equipe coordenadora do programa, professores, prefeituras e associações para firmar compromissos e acordos com o Programa;

Participação de estudantes, tutores e professores na produção de materiais didáticos e/ou produção intelectual;

Tutorias presenciais e a distância para formação de professores nas áreas de educação infantil, séries iniciais, ciências e matemática.

Desenvolvimento de cursos presenciais, semi-presenciais e a distância.

**Cursos de Especialização a Distância para Formação de Tutores e Cursos de Formação Continuada de Professores**

Educação Matemática e Científica ênfase em Educação Infantil;

Educação Matemática e Científica ênfase em Séries Iniciais;

Educação em Ciências ênfase em Ensino Fundamental;

Educação Matemática ênfase em Ensino Fundamental.

**Metas do Programa EDUCIMAT**

Formar, em 4 anos, 1920 (um mil, novecentos e vinte) tutores;

Formar, com tutoria local, cerca de 20.500 (vinte mil e quinhentos) professores para educação infantil, séries iniciais, ciências e matemática;

Produzir kits de material instrucional para o ensino de Ciências e de Matemática;

Produzir 88 (oitenta e oito) produtos, nas quatro linhas de ação, em quatro anos;

Reproduzir, por meio de acordos com prefeituras e outras instituições, produtos de ensino e de formação, para uso da rede pública de ensino.

**Comitê Geral do Programa EDUCIMAT**

Profª. Dra. Terezinha Valim Oliver Gonçalves UFPA

Profª. Ms. Andrela Garibaldi Loureiro Parente UFPA

Prof. Ms. Adriano Sales dos S. Silva UFPA/Castanhal

Profª. Ms. Larissa Sato Dias CESUPA

**Coordenação de Áreas:**

**Ciências**

Maria Lúcia Harada UFPA

**Educação Indígena**

Jane Felipe Beltrão UFPA

**Matemática**

Tadeu Oliver Gonçalves UFPA

**Educação Infantil**

Tânia Regina Lobato dos Santos UEPA

**Educação Inclusiva**

Maria Joaquina Nogueira da Silva CESUPA

**Séries Iniciais**

Neivaldo Oliveira Silva SEDUC

**Educação Ambiental**

Ariadne Peres do Espírito Santo UFPA

**Secretária**

Lourdes Maria Trindade Gomes

## APRESENTAÇÃO

O presente texto não é um manual teórico-metodológico dos temas aqui tratados, primeiro porque os conteúdos são do conhecimento ou domínio daqueles que atuam no ensino da matemática no nível fundamental. Segundo, porque não nos preocupamos com nenhum referencial metodológico, uma vez que este texto é destinado a professores que, sem dúvida alguma, são mais hábeis do que nós para estabelecer uma metodologia se necessário.

Aqui sugerimos estratégias sobre 3 temas da matemática do ensino fundamental que têm sido freqüentemente demandados por nossos alunos-professores nos cursos de educação continuada, em educação matemática, ofertados pelo NPADC/UFPA.

O primeiro tema tratado é “operações com frações” que, embora sejam algoritmicamente conhecidas, demandam questionamentos quanto à necessidade do uso do m.m.c. para adição e subtração ou o do por que de “multiplicar a primeira pelo inverso da segunda” no caso de divisão de frações. Assim, por meio da motivação geométrica de área tratamos de responder os questionamentos e oportunamente tratamos do conceito de comensurabilidade e conseqüentemente da classificação dos números reais em racionais e irracionais. Estes últimos conceitos, comensurabilidade e números racionais, estão entre os não muito bem “entendidos” ou mesmo conhecidos daqueles que atuam no ensino das séries iniciais.

O segundo tema trata das expressões algébricas, geralmente introduzidas de modo formal na sétima série do ensino fundamental, as quais demandam significados, visto estas ‘constituírem um emaranhado de letras sem sentido’. Para atender essa demanda, mostramos através do conceito de grandezas proporcionais e conseqüentemente de problemas de regra de três simples e composta, a construção de expressões algébricas que resolvem esses problemas. Em linha direta, a semelhança de figuras planas, estudo de escalas e uma variedade de expressões utilizadas nas diferentes áreas de conhecimento são apresentadas por meio de situações, ditas atividades, as quais são discutidas ou propostas.

O terceiro tema, matemática financeira, tem sido uma exigência de alunos-professores nos cursos de educação continuada e a justificativa se dá por ser um tema muito presente no cotidiano, inclusive como conteúdo de concursos para diferentes empregos, dos alunos do ensino básico e da educação de jovens e adultos. Aqui, obviamente, não poderíamos fazer um estudo mais detalhado do assunto, pois extrapola o propósito deste trabalho cujo destino são professores do ensino fundamental e desse modo, optamos por uma estratégia de construir expressões algébricas a partir de discussão de situações–problema de matemática financeira, dando, dessa forma, continuidade ao tema anterior. Oportunamente situações-problema como o financiamento de um bem, geralmente introduzidas no ensino médio, são tratadas através do uso de polinômios estudados na sétima série do ensino fundamental. Essa estratégia sugere que o problema de financiamento, tão presente no mundo atual, pode ser tratado ainda no ensino fundamental, como também a significância (contextualização) do ensino de polinômios de grau maior que dois nesse nível de ensino.

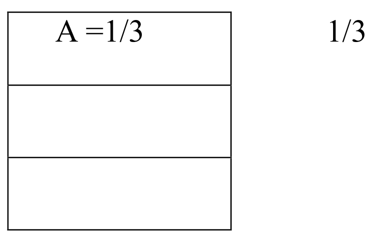
Uma série de atividades envolvendo os temas aqui tratados são propostas ao longo do texto e ao final deste, para que sejam desenvolvidas e ao mesmo tempo se tornem instrumentos de reflexões e discussões com os Tutores.

# NÚMEROS RACIONAIS E MEDIDA DE ÁREA

## A MEDIDA DE ÁREA

Para medir uma região plana comparamos esta com uma região plana tomada como unidade de área e quantificamos quantas vezes a região contém a unidade considerada. Assim, a medida de área é o número de vezes que a unidade de área está contida na região plana.

Se tomarmos um quadrado de lado igual a **um** como unidade de área, estaremos afirmando que sua área é **um**. Portanto, se dividirmos esse quadrado em **n** partes iguais, cada uma dessas partes terá $\frac{1}{n}$ unidades de área. Assim, por exemplo, quando dividimos em 3 partes iguais, temos que cada parte mede um terço de unidade de área. Isso está esquematicamente representado pelos retângulos de dimensões 1 e $\frac{1}{3}$.




Isto quer dizer que $1 = 3.\left(\frac{1}{3}\right)$ ou, equivalentemente, que $1 : \left(\frac{1}{3}\right) = 3$, ou seja, a unidade contém 3 partes de $\frac{1}{3}$ de área. Desse modo, se tomássemos a parte $\frac{1}{3}$ como "unidade", diríamos que a medida da área do quadrado unitário é $3\left(\frac{1}{3}\right)$.

A escolha da unidade define a medida. E no cotidiano escolhemos essas unidades de forma tão natural que não nos damos conta dessa escolha. Por exemplo, quando nos referimos à distância entre Belém e Salinas, dizemos que é de 200 Km – a unidade é Kilômetro - e quando nos referimos que a largura de uma porta é 80 cm – a unidade é centímetro -, fizemos as escolhas das unidades que nos pareceram mais convenientes.

Assim, uma mesma grandeza pode apresentar diferentes medidas para diferentes unidades. Vejamos alguns exemplos:

Se dividirmos um lado do quadrado unitário em **m** partes iguais e o lado adjacente em **n** partes iguais obteremos **m.n** retângulos de **1/(m.n)** de área. Abaixo ilustramos a situação para m =3 e n = 4.

| | | |
|---|---|---|
| 1/12 | | |
| | | |
| | | |
| | | |

Aqui, a área $\frac{1}{12}$ esta representada pelo retângulo de dimensões $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}=\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{4}\right)$, o produto das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, e observamos que $1=12\left(\frac{1}{12}\right)$, ou seja, o quadrado unitário contém 12 retângulos de área 1/12 e, portanto, se nos referirmos ao quadrado unitário em função dos retângulos, diremos que sua medida é $12\left(\frac{1}{12}\right)$. Em geral, $1=p.\left(\frac{1}{p}\right)$, p denota **a *medida*** que é o numero de vezes que a área $\frac{1}{p}$ está contida no quadrado unitário. Convém observar que o produto entre as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ é representado pela área de $\frac{1}{12}$ do retângulo, bem como a divisão $1:\left(\frac{1}{12}\right)=12$ é a medida do quadrado unitário em relação a unidade $\frac{1}{12}$ e, mais geralmente a divisão $1:\left(\frac{1}{p}\right)=p$ denota a medida da área do quadrado unitário em relação à unidade de área $\frac{1}{p}$.

## OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

Tomando isso como princípio, podemos interpretar geometricamente o quociente da divisão entre as frações $\left(\frac{a}{b}\right):\left(\frac{c}{d}\right)$ como a medida do retângulo de área $\frac{a}{b}$ em relação à unidade de área $\frac{c}{d}$. Para ilustrar isso, considere as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$ representadas como segue:

| | | |
|---|---|---|
| 1/3 | 1/3 | 1/3 |

As duas primeiras colunas representam a fração $\frac{2}{3}=2\left(\frac{1}{3}\right)$ e, portanto, a divisão de $\left(\frac{2}{3}\right):\left(\frac{1}{3}\right)=2$, que é o numero de vezes que a unidade $\frac{1}{3}$ está contida em $\frac{2}{3}$.

Agora consideremos a divisão $\left(\frac{1}{2}\right):\left(\frac{1}{6}\right)$ e procedamos a representação geométrica, simultaneamente, no mesmo quadrado unitário dessas frações como segue:

1/6

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1/2 | 1/12 | 1/12 | 1/12 | | | |
| | 1/12 | 1/12 | 1/12 | | | |

Aqui observamos que a área $\frac{1}{2}$ e a área $\frac{1}{6}$ têm uma área comum $\frac{1}{12}$, isto é, as áreas $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6}$ contêm um número inteiro de vezes a área $\frac{1}{12}$, mais precisamente $\frac{1}{2}=6.\left(\frac{1}{12}\right)$ e $\frac{1}{6}=2.\left(\frac{1}{12}\right)$, de onde podemos concluir, sem dificuldades, pela inspeção geométrica na figura anterior, que $\frac{1}{6}$ esta contido 3 vezes em $\frac{1}{2}$, ou seja:

$$\frac{1}{2} = 6.\left(\frac{1}{12}\right) = 3.\left[2.\left(\frac{1}{12}\right)\right] = 3.\left(\frac{1}{6}\right)$$

e, portanto:

$$\left(\frac{1}{2}\right):\left(\frac{1}{6}\right) = \left[6\left(\frac{1}{12}\right)\right]:\left[2\left(\frac{1}{12}\right)\right] = \frac{6:2}{12:12} = \frac{3}{1} = 3$$

Como se observa, do ponto de vista numérico, estando as frações escritas na mesma unidade, podemos obter o resultado dividindo-se os numeradores e denominadores, respectivamente, como é mostrado a seguir:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = m\left(\frac{1}{p}\right):n\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{m:n}{p:p} = \frac{m:n}{1} = \frac{m}{n}$$

A multiplicação, geometricamente, já foi evidenciada anteriormente como a área do retângulo, ou seja, o produto das frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ é representado pela área do retângulo de dimensões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ que é $\frac{a.c}{a.d}$.

Por exemplo, se queremos efetuar o produto entre as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, dividimos um lado do quadrado unitário em 3 partes de $\frac{1}{3}$, unidade de $\frac{2}{3}$, e o lado adjacente em 4 partes de $\frac{1}{4}$, unidade de $\frac{3}{4}$, e obtemos doze retângulos de área $\frac{1}{12}$, como é mostrado a seguir:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1/12 | 1/12 | 1/12 | |
| 1/12 | 1/12 | 1/12 | |
| | | | |

Tomando a interseção entre os retângulos de área 2/3 e de área 3/4, obtemos um retângulo contendo 6 retângulos de área $\frac{1}{12}$, e, portanto, o produto é $6\left(\frac{1}{12}\right)=\frac{6}{12}$, que é a área do retângulo de dimensões $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

Do ponto de vista numérico, podemos efetuar a multiplicação, tal como na divisão, efetuando o produto entre os numeradores e denominadores respectivamente, ou seja:

$$\left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{8}{12}\right).\left(\frac{9}{12}\right)=\frac{72}{144}=\frac{6.12}{12.12}=\left(\frac{6}{12}\right).\left(\frac{12}{12}\right)=\frac{6}{12}$$

ou mais simplesmente:

$$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{2.3}{3.4}\right)=\frac{6}{12}$$

Em geral,

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Na adição e subtração, agimos geometricamente adicionando ou subtraindo unidades comuns de área .

Assim, por exemplo, se queremos efetuar a adição entre as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, precisamos determinar uma unidade comum entre elas e, para isso, procedemos do mesmo modo que no exemplo anterior e obtemos:

$$\frac{2}{3}=8\left(\frac{1}{12}\right) \quad \text{e} \quad \frac{3}{4}=9\left(\frac{1}{12}\right)$$

e, portanto:

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=8\left(\frac{1}{12}\right)+9\left(\frac{1}{12}\right)=17\left(\frac{1}{12}\right)=\frac{17}{12}$$

similarmente:

$$\frac{2}{3}-\frac{3}{4}=8\left(\frac{1}{12}\right)-9\left(\frac{1}{12}\right)=-1\left(\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{12}$$

## A COMENSURABILIDADE

Quando duas áreas $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ têm uma área comum $\frac{1}{p}$ que está contida um número inteiro m de vezes na primeira e um número inteiro n de vezes na segunda, como nos exemplos acima, dizemos que as áreas $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são ***comensuráveis*** e a razão, isto é, a divisão entre elas é a razão entre os inteiros $\frac{m}{n}$. De fato, pois:

$$\left(\frac{a}{b}\right):\left(\frac{c}{d}\right)=m\left(\frac{1}{p}\right):n\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{m:n}{p:p}=\frac{m:n}{1}=\frac{m}{n}$$

e podemos escrever:

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{m.c}{n.d}\right)$$

portanto:

$$\left(\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{m.c.d}{n.c.d}\right)=\left(\frac{m.c.d}{n.d.c}\right)=\left(\frac{m.c}{n.d}\right)\left(\frac{d}{c}\right)$$

e assim:

$$\left(\frac{a}{b}\right):\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{m.c}{n.d}\right)\left(\frac{d}{c}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right)=\left(\frac{a.d}{b.c}\right)$$

Como observamos, para efetuar a *divisão entre duas frações, efetuamos o produto da primeira pelo inverso da segunda*. Isso é um algoritmo prático, visto que evita a determinação de uma unidade comum entre elas, já que a multiplicação de frações não exige.

Nas operações de adição e subtração não é possível o cálculo sem que estejam na mesma unidade, ou seja, precisamos encontrar uma unidade comum entre as frações, de modo que possamos contá-las.

Com o auxílio do quadrado unitário é fácil perceber que esta unidade existe, pois ela é definida a partir das unidades explícitas das frações, no caso os denominadores, ou seja, se tomarmos as frações $\frac{a}{b}=a\left(\frac{1}{b}\right)$ e $\frac{c}{d}=c\left(\frac{1}{d}\right)$, existe a unidade $\frac{1}{b.d}$, que está um número inteiro m de vezes em $\frac{a}{b}$ e um número inteiro n de vezes em $\frac{c}{d}$. De fato, pois se tomarmos m= a.d e n= c.b, temos que:

$$m\left(\frac{1}{b.d}\right)=\left(\frac{m}{b.d}\right)=\left(\frac{a.d}{b.d}\right)=\frac{a}{b}$$

e

$$n\left(\frac{1}{b.d}\right)=\left(\frac{n}{b.d}\right)=\left(\frac{c.b}{d.b}\right)=\frac{c}{d}$$

Na verdade, se q é múltiplo comum de b e d, ou seja, q = r.b e q = s.d, onde r e s são dois inteiros, então, $\frac{1}{q}$ é uma unidade comum para as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, pois tomando m’=r.a e n’=s.c , temos:

$$\frac{a}{b}=\frac{r.a}{r.b}=r.a\left(\frac{1}{r.b}\right)=m'\left(\frac{1}{q}\right)$$

e

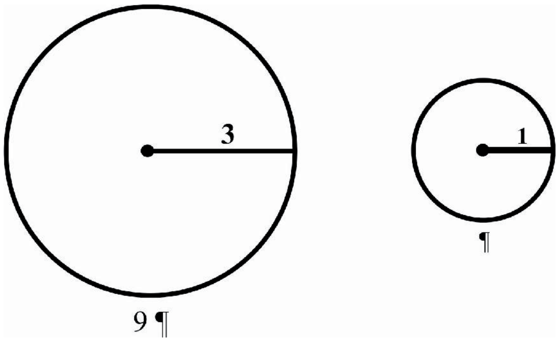
$$\frac{c}{d}=\left(\frac{s.c}{s.d}\right)=s.c\left(\frac{1}{s.d}\right)=n'\left(\frac{1}{q}\right)$$

em particular, podemos tomar q = mmc (b,d), ou seja, o menor múltiplo comum de b e d, que é a unidade usualmente utilizada nos livros didáticos.

As grandezas comensuráveis com o quadrado unitário constituem os números ditos ***racionais***.

## A INCOMENSURABILIDADE

O círculo de raio igual a um, que chamaremos de círculo unitário, é usado naturalmente nos livros didáticos como unidade de medida para áreas de círculos e setores de círculos. Assim, quando se diz que um dado círculo tem área igual a $9\pi$, estamos dizendo que esse círculo tem área igual a 9 vezes a área do círculo unitário que é representada por $\pi$.




Para medir a área de um círculo de raio **r**, dita $C_r$, recorremos à relação entre áreas de figuras planas semelhantes, que estabelece que a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Dois círculos são semelhantes e a razão de semelhança é a razão entre os raios e, portanto:

$$\frac{C_r}{\pi} = \left(\frac{r}{1}\right)^2$$

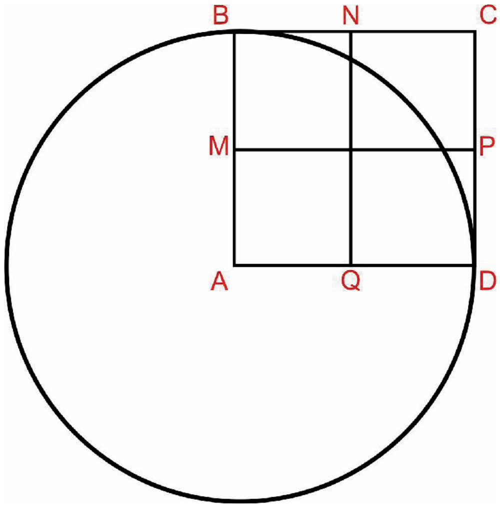
ou melhor

$$C_r = \pi r^2$$

## A ÁREA DO CÍRCULO UNITÁRIO

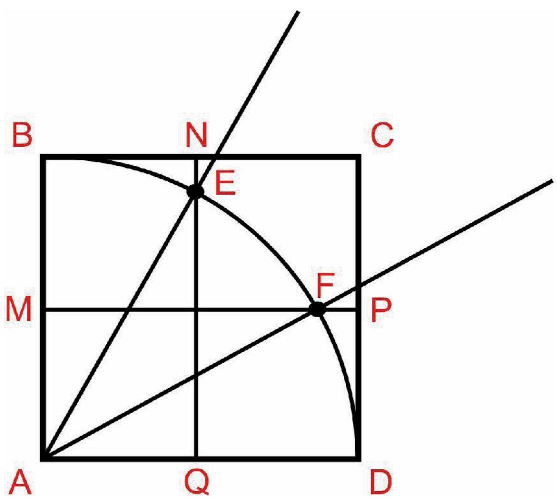
Tomando o quadrado unitário como unidade de área, observamos, na figura a seguir, que o mesmo contém $\frac{1}{4}$ do círculo e, portanto:

$\frac{\pi}{4} < 1.$




A partir dos pontos médios M, N, P e Q dos lados, como mostra a figura, construímos os segmentos MP e NQ, que dividem o quadrado unitário em 4 quadrados de área $\frac{1}{4}$ .

Rotacionando 30º duas vezes, o lado AB em torno do vértice A, no sentido horário, encontramos os pontos E e F de interseção com os segmentos NQ e MP, respectivamente.



Os triângulos ABE, AEF e AFD são isósceles e congruentes, pois possuem ângulos relativos ao vértice e dois lados homólogos com medidas iguais (LAL).

Considerando o triângulo AFD e tomando para base o lado AD=1, observamos que a medida da altura é igual a medida do segmento DP=$\frac{1}{2}$, de onde se conclui que a área desse triângulo é igual a $\frac{1}{4}$. Desse modo, temos:

$$3\left(\frac{1}{4}\right) < \frac{\pi}{4} < 1$$

ou, equivalentemente:

$$3 < \pi < 4$$

ou seja, a área $\pi$ não contém um número inteiro de vezes o quadrado unitário.

Tomando, agora, como unidade o quadrado de área $\left(\frac{1}{100}\right)$, obtido do quadrado unitário, dividindo os lados adjacentes em 10 partes iguais, encontramos que a área $\pi$ está compreendida entre 314 e 315 unidades de $\left(\frac{1}{100}\right)$, ou seja:

$$314\left(\frac{1}{100}\right) < \pi < 315\left(\frac{1}{100}\right)$$

ou, equivalentemente:

$$3{,}14 < \pi < 3{,}15$$

de onde observamos que a unidade $\frac{1}{100}$ também não está contida um número inteiro de vezes na área $\pi$.

Procedendo de modo similar, agora dividindo o lado do quadrado anterior também em 10, obtemos um quadrado de área $\frac{1}{10000}$ e observa-se que:

$$31415\left(\frac{1}{10000}\right) < \pi < 31416\left(\frac{1}{10000}\right)$$

ou, equivalentemente:

$$3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$$

Agindo deste modo, sucessivamente, encontramos:

$$3141592\left(\frac{1}{1000000}\right) < \pi < 3141593\left(\frac{1}{1000000}\right)$$

ou:

$$3{,}141592 < \pi < 3{,}141593$$

ou ainda:

$$3{,}14159265 < \pi < 3{,}14159266$$

Na verdade, para cada unidade $\left(\frac{1}{10}\right)^k$ existe sempre um número inteiro m, de tal modo que:

$$\frac{m}{(10)^k} < \pi < \frac{m+1}{(10)^k}$$

ou, equivalentemente:

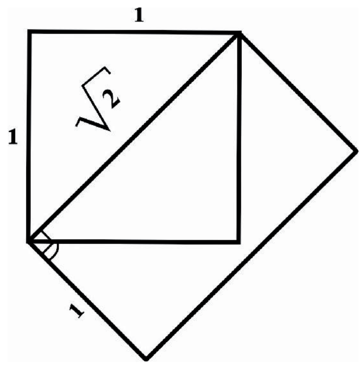
$$m.10^{-\mathbf{k}} < \pi < (m+1).10^{-\mathbf{k}}$$

ou seja, não conseguiremos encontrar um quadrado que esteja contido um número inteiro de vezes no quadrado unitário e também um número inteiro de vezes no círculo unitário, pois o quadrado e o círculo unitários ***não são comensuráveis***.

Duas grandezas **A** e **B** que não possuem uma unidade comum que esteja contida um número inteiro **m** de vezes na primeira e um número inteiro **n** de vezes na segunda são ditas ***incomensuráveis*** e segue que:

$$\frac{A}{B} \neq \frac{m}{n}\text{ , para todo m e n inteiros}$$

Para ilustrar melhor essa situação, construa um retângulo a partir da diagonal do quadrado unitário, que mede $\sqrt{2}$, e rotacionando o lado em torno do vértice, onde concorre o lado e a diagonal, de tal forma que eles fiquem ortogonais, como mostra o desenho abaixo.




A área desse retângulo é $\sqrt{2}$ e, tal como a área $\pi$, é uma grandeza incomensurável com a unidade. De fato, se admitirmos que $\sqrt{2}$ é comensurável com a unidade, isso acarreta que existem inteiros m e n, de tal modo que a unidade 1/n está contida um número inteiro m de vezes em $\sqrt{2}$, ou seja:

$$\sqrt{2} = m.\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}$$

ou, equivalentemente:

$$2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

ou ainda que:

$$2n^2 = m^2$$

Isso quer dizer que os inteiros $2n^2$ e $m^2$ representam um mesmo inteiro que admite duas decomposições em fatores primos, já que o fator primo 2 apresenta expoente ímpar em $2n^2$ e expoente par em $m^2$. Mas isso não é possível, pois o Teorema Fundamental da Aritmética estabelece que um inteiro admite uma única decomposição em fatores primos. Desse modo, $\sqrt{2}$ não pode ser escrita como a razão de dois inteiros, ou seja:

$$\sqrt{2} \neq \frac{m}{n}, \text{ para todo inteiro m e n}$$

Do mesmo modo, não é possível encontrar um valor que expresse exatamente a área $\pi$ e várias estimativas para esse número já foram estabelecidas por diferentes pesquisadores, como a encontrada por David e Gregory Chudnovski, publicada na revista Science News em setembro de 1989, com um bilhão de casas decimais. O valor usual nos livros didáticos é a aproximação por falta 3,14.

As medidas das grandezas incomensuráveis constituem os números não racionais, ditos ***irracionais***. Esses números não apresentam representação decimal finita e, nos cálculos numéricos, em geral, tomamos uma ***aproximação racional por falta ou por excesso***, como, por exemplo, para o número $\pi$, que ora adotamos 3,14, ora 3,15.

## ATIVIDADES PROPOSTAS:

**1.** O cálculo da área de um círculo era realizado pelos egípcios através da seguinte regra: "Tomar o diâmetro do círculo, subtrair-lhe uma nona parte e levantar ao quadrado". Qual era o valor adotado, pelos egípcios, para o número?

**2.** Inscreva o círculo unitário num quadrado de lado igual ao diâmetro do círculo. Dividindo cada lado do quadrado em 3 partes iguais e a partir dos nove novos quadrados formados, obtenha uma estimativa para a área do círculo.

**3.** Repita o exercício anterior para um círculo de nove unidades de diâmetro e tome como estimativa para área do círculo o quadrado perfeito imediatamente superior. Conclua daí que a estimativa de $\pi$ é a mesma encontrada no exercício 1.

# AS VÁRIAS FORMAS DE UMA EXPRESSÃO ALGÉBRICA

Uma expressão algébrica é a maneira pela qual representamos matematicamente a maioria dos fenômenos e situações presentes na natureza. Vejamos algumas situações ilustrativas:

**4.** Três costureiras preparam 6 fardamentos em um dia. Quantos uniformes, iguais aos primeiros, serão confeccionados por 9 costureiras em um dia de trabalho?

Nota-se, para a nova situação, que a quantidade de costureiras foi triplicada, então, espera-se que a quantidade de uniformes confeccionados em um dia seja também triplicada, o que implica na confecção de 18 uniformes.

A situação pode ser apresentada da seguinte forma: se 3 costureiras preparam 6 uniformes em um dia, quer dizer que a média/dia é de 2 uniformes por costureira.

Considerando **u** o número de uniformes e **c** o número de costureiras, podemos escrever a expressão

$$\mathbf{u} = 2.\mathbf{c}$$

que nos permite calcular a quantidade de uniformes confeccionados por qualquer quantidade de costureiras.

Assim, para 9 costureiras, como é pedido no exemplo, teremos:

$$\mathbf{u} = 2 \cdot 9 \Rightarrow \mathbf{u} = 18.$$

Se o número de costureiras for igual a 5,

$$\mathbf{u} = 2 \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = 10$$

Nesse caso, dizemos que as grandezas representadas pela quantidade de uniformes e de costureiras são **diretamente proporcionais**, porque o valor de uma delas pode ser obtido a partir do valor da outra multiplicado por uma constante positiva, que é chamada **taxa de proporcionalidade**. Em outras palavras, a **taxa de proporcionalidade** sempre **representa a razão entre as duas grandezas consideradas.**

**5.** Ao efetuar uma compra que totalizou R$150,00, uma pessoa obteve um desconto de 10%, por pagar à vista. Quanto pagou esta pessoa pela compra efetuada?

10% representam um desconto de 10 reais em cada 100 reais (que é a taxa da proporcionalidade), indicando que o valor do desconto é diretamente proporcional ao total da compra, e que pode ser representado pela expressão algébrica:

$$d = \frac{10}{100} \, . \, c \quad \text{ou} \quad d = 0{,}10 \, . \, c$$

Como o total da compra (c) é de R$150,00, o valor do desconto (d) será:

$$d = 0{,}10 \, . \, R\$150{,}00 = R\$15{,}00$$

Sendo, então, o valor pago pela compra igual a R$150,00 – R$15,00 = R$135,00.

## ATIVIDADES PROPOSTAS:

Nestas atividades, os alunos vão relacionar a medida do comprimento de uma circunferência com a medida de um arco e usar expressões algébricas para representar essas relações.

**6.** Peça aos alunos para construírem circunferências com diferentes tamanhos de diâmetro e, depois, com o auxílio de um pedaço de barbante, medirem o contorno de cada circunferência (**C**) e seu respectivo diâmetro (**d**), completando a tabela abaixo com os valores encontrados.

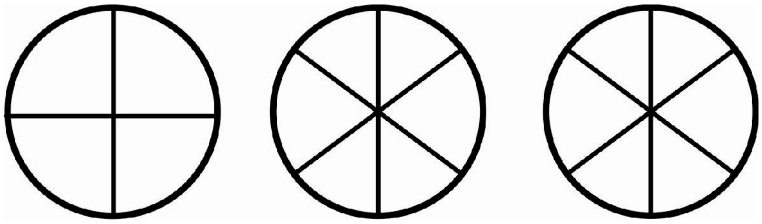
| C | d | C/d |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

Chegando, assim, à razão $\frac{C}{d} = t$, ou seja, $\frac{C}{2r} = t$, ou ainda que o comprimento de uma circunferência é dado pela expressão

$$\mathbf{C} = t \cdot \mathbf{d} \quad \text{ou} \quad \mathbf{C} = t \cdot 2r$$

**Obs**: Nesse momento, os alunos observarão que, para qualquer circunferência, o valor de t (taxa de proporcionalidade) é constante, e o professor pode aproveitar para falar sobre o π.

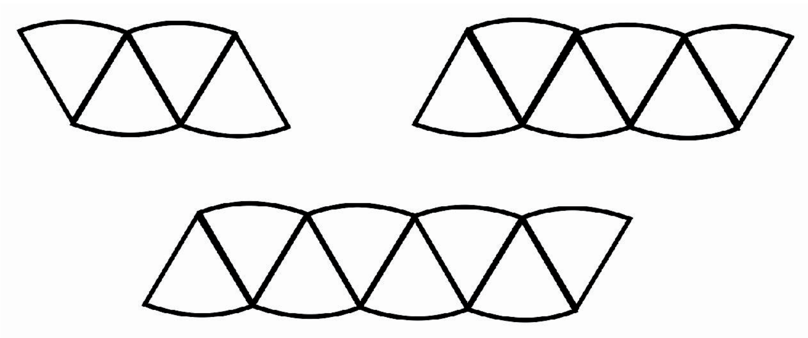
**7.** Em uma cartolina, peça aos alunos que desenhem um círculo e que o dividam em 4, 6, 8, ... partes iguais.



Os alunos devem expressar a medida de cada arco determinado na circunferência, para que cheguem à conclusão de que o comprimento da circunferência pode ser indicado através da expressão algébrica:

**C** = n . arco, sendo n o número de divisões feitas no círculo.

**8.** Completando essa atividade, solicitar que os alunos recortem cada círculo e os setores desse círculo, os quais juntos representam a área ocupada pelo círculo. Faça-os montar um paralelogramo com os setores e verificar que a área do círculo é uma aproximação da área do paralelogramo, cuja base é a metade do comprimento da circunferência e cuja altura é o raio do círculo.



Chegando, assim, à expressão da área do círculo: $\pi r^2$

**9.** Lembrando que cada setor ocupa uma área que é equivalente à fração do círculo, conforme a divisão efetuada, facilmente chegarão à expressão da área do setor circular:

$\frac{\pi r^2}{n}$, onde n é o número de divisões do círculo,

ou ainda à expressão:

$\frac{\alpha}{360^\circ} . \pi r^2$, onde $\alpha$ é o ângulo do setor.

**10.** Um motorista faz o percurso entre as cidades de Castanhal e Bragança em 3 horas, impondo ao seu carro uma velocidade média de 60km/h. Quanto tempo levará esse motorista para fazer o mesmo percurso se dirigir seu carro a uma velocidade média de 120km/h?

Na atual situação, nota-se que a velocidade foi duplicada, então, espera-se que o tempo gasto para fazer o percurso seja reduzido pela metade, isto é, que com o tempo aconteça o inverso do que aconteceu com a velocidade.

Representemos a situação considerando **t** o tempo gasto para fazer o percurso e **v** a velocidade média do carro, teremos:

$\mathbf{t} = \dfrac{K}{V}$ , onde k é a taxa de proporcionalidade

$3 = \dfrac{k}{60} \Rightarrow \quad k = 180$

O que nos dá a expressão algébrica:

$\mathbf{t} = \dfrac{180}{V}$

a qual permite que seja determinado o tempo gasto para fazer o percurso quando o carro desenvolve 120km/h.

$\mathbf{t} = \dfrac{180}{120} = 1{,}5$ ou $t = 1h\ 30min$

Ou outras velocidades como, por exemplo, 90km/h :

$\mathbf{t} = \dfrac{180}{90} = 2h$

Ou: 100km/h

$\mathbf{t} = \dfrac{180}{V} \Rightarrow \mathbf{t} = \dfrac{180}{100} = 1{,}8$ , isto é, 1 hora e 8/10 da hora

Como $\dfrac{8}{10}$ . 60min = 48min $\Rightarrow$ **t =** 1h 48min

Façamos uma tabela para a situação apresentada:

| Velocidade (v) | Tempo (t) |
|---|---|
| 60km/h | 3h |
| 90km/h | 2h |
| 100km/h | 1h48min |
| 120km/h | 1h30min |

Nesse caso, dizemos que as grandezas velocidade e tempo são **inversamente proporcionais** e verificamos que a **taxa de proporcionalidade é o produto das grandezas apresentadas no problema**.

Isso pode ser verificado na tabela construída para cada situação apresentada. Como

$60 \,.\, 3 = 180$

$90 \,.\, 2 = 180$

$100 \,.\, 1{,}8 = 180$

$120 \,.\, 1{,}5 = 180$

**11.** Doze operários constroem uma casa em 90 dias. Em quanto tempo dez operários construiriam a mesma casa?

$d = \frac{k}{o}$ é a expressão para a situação, sendo $o$ operário, $d$ dia e $k$ a constante de proporcionalidade.

temos: $90 = \frac{k}{12}$ , de onde resulta $k = 1080$

então $d = \frac{1080}{o}$ e assim $d = \frac{1080}{10} = 108$ dias

e para 15 operários?

$d = \frac{1080}{15} = 72$ dias

É importante observar que entre duas grandezas nem sempre temos uma relação de proporcionalidade, por exemplo, se dissermos:

**I.** Lucas tem 10 anos e pesa 62 kg. Quantos quilos pesa sua irmã que tem 12 anos?

**II.** Um município, cuja área é de 68.000 $km^2$, possui 13.000 habitantes, quantos habitantes possui o município vizinho que tem 70.000 $km^2$ de área?

## ATIVIDADES

**12.** O exemplo (I) pode ser uma atividade desenvolvida em sala de aula, na qual os alunos, por meio da comparação de suas idades e de seus respectivos pesos, concluem que não existe proporcionalidade entre as grandezas idade e peso.

**13.** No exemplo (II) pode ser explorado e explicado que é possível calcular a densidade demográfica de um município, razão entre o número de habitantes e a área ocupada pelo município. Entretanto, que muitas variáveis impedem que exista uma proporcionalidade entre as razões habitantes/$km^2$ de dois municípios, mesmo que vizinhos. Essas variáveis podem ser: as oportunidades de trabalho, o número de escolas, as condições de saneamento básico e infra-estrutura, o que está intimamente ligado ao tipo de administração exercida pelo poder público, e ainda em muitos deles a total dependência de recursos provenientes em maioria de fontes como o Fundo de Participação dos Municípios (FPM), o Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços (ICMS) e o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento do Ensino Fundamental e de Valorização do Magistério (Fundef).

## ATIVIDADE PROPOSTA:

**14.** A densidade demográfica de uma região é a razão entre o número de habitantes que ela tem e sua área, complete a tabela e quando estiver completa, responda as seguintes perguntas:

| Estado | Área (Km²) | População | Densidade Demográfica(hab/km²) |
|---|---|---|---|
| Acre | | 557 526 | 3,64 |
| Amazonas | 1 577 820 2 | 2 812 557 | |
| Amapá | | 477 032 | 3,32 |
| Pará | 1247 689 5 | 6 195 965 | |
| Rondônia | 238 512 8 | | 5,78 |
| Roraima | 225 116 1 | | 1,44 |
| Tocantins | | 1 157 098 | 4,15 |

Fonte: IBGE (2002)

a) Qual o Estado da Região Norte que tem maior população?

b) Qual o Estado com maior Densidade Demográfica?

c) Qual o quinto Estado com maior área?

d) Coloque em ordem decrescente os Estados mais populosos da Região Norte?

O Índice de Massa Corporal **(IMC)** é reconhecido como padrão internacional para avaliar o grau de obesidade. O **IMC** é calculado dividindo o peso $p$(em kg) pela altura $h$(em metros) ao quadrado, ou seja, IMC = $\frac{p}{h^2}$.

**15.** Utilizando um texto qualquer sobre obesidade, ou especificamente sobre obesidade infantil como o abaixo apresentado, e a tabela fornecida pela Associação Brasileira para o Estudo da Obesidade (ABESO), pode ser proposto a cada aluno da turma que calcule seu IMC.

**Um terço das crianças no mundo são obesas, alertam especialistas**

Cerca de 35% da população infantil do mundo tem problemas de obesidade e isto representa uma questão de saúde pública que deve ser resolvida, afirmaram hoje em Cancún autoridades do XIV Congresso Internacional de Pediatria. O vice-presidente do comitê organizador do encontro aberto hoje, o mexicano José Nicolás Reyes, afirmou que o aumento da obesidade infantil é um "problema" que deve ser atendido "com mecanismos de alimentação adequada". (Site Terra, 16/08/04)

<table>
<tr><th>CATEGORIA</th><th>IMC</th><td rowspan="7">Peso Saudável equivale ao Peso Normal</td></tr>
<tr><td>Abaixo do peso</td><td>Abaixo de 18,5</td></tr>
<tr><td>Peso normal</td><td>18,5 – 24,9</td></tr>
<tr><td>Sobrepeso</td><td>25,0 – 29,9</td></tr>
<tr><td>Obesidade grau I</td><td>30,0 – 34,9</td></tr>
<tr><td>Obesidade grau II</td><td>35,0 – 39,9</td></tr>
<tr><td>Obesidade grau III</td><td>40,0 e acima</td></tr>
</table>

**16.** Atualmente, a obesidade é considerada uma doença crônica, que atinge milhões de pessoas em todo mundo. No Brasil, cerca de 35% de pessoas são obesas, sendo 13% mulheres, 7%

homens e 15% crianças. Uma pessoa é considerada obesa quando o seu IMC (índice de massa corpórea) é maior ou igual a 30.

Responda:

a) Se um indivíduo tem massa 78,5kg e sua altura é 1,65m. Qual a sua massa corpórea?

b) Descubra a sua massa corpórea?

**17.** Uma mulher, ao engordar, passou a ter 25% a mais em sua massa corporal. Se sua massa corporal tivesse aumentado em 15%, estaria com 10 kg a menos. Qual era a massa corporal inicial da mulher?

**18.** Ainda com respeito à saúde, pode ser lembrado e/ou utilizado um texto relacionado às medidas preventivas do aumento da pressão arterial pela redução dos fatores de risco, entre as quais está sempre presente a recomendação da atividade física de intensidade moderada estabelecida de forma simples e precisa, isto é, conseguindo falar e controlando a freqüência cardíaca durante o exercício.

Sendo a freqüência cardíaca medida durante o exercício chamada Freqüência em Treinamento (FT) dada pela expressão:

$$FT = 60\% \, (FC \, max - FR) + FR$$

onde FC max é calculada por (220 – idade) e FR (freqüência cardíaca em repouso) é medida após 5 minutos de repouso deitado.

Como atividade, pode ser proposta a determinação de uma expressão mais simples para cálculo da FT, e também várias simulações para cálculo da FT.

Uma grandeza pode ser, ao mesmo tempo, direta e/ou inversamente proporcional a duas ou mais grandezas. Vejamos a seguir se na primeira situação apresentada considerássemos também o número de dias:

**19.** Três costureiras preparam 6 fardamentos em um dia. Quantos uniformes, iguais aos primeiros, serão confeccionados por 9 costureiras em 3 dias de trabalho?

Aqui temos duas grandezas (quantidade de costureiras e dias de trabalho) que são ambas diretamente proporcionais à grandeza representada pela quantidade de uniformes. Nesse caso, temos a expressão:

$$\mathbf{u} = k \,.\, \mathbf{c} \,.\, \mathbf{d}$$

que nos permite encontrar a taxa de proporcionalidade $k = \frac{u}{c.d}$, já identificada no primeiro exemplo como igual a 2.

Dessa forma, podemos calcular a quantidade de uniformes pedida na questão:

$$\mathbf{u =} 2 \,.\, 9 \,.\, 3 = 54$$

**20.** Sabendo que 9 costureiras confeccionam 54 uniformes em 3 dias, dispondo de 12 costureiras, em quantos dias serão confeccionados 60 uniformes iguais aos primeiros?

Na situação apresentada temos as grandezas quantidade de uniformes e quantidade de costureiras, respectivamente, direta e inversamente proporcionais à grandeza tempo. O que nos leva à expressão:

$$\boldsymbol{d} = k \,.\, \frac{u}{c} \quad \text{ou} \quad 3 = k \,.\, \frac{54}{9} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2}$$

O que permite calcularmos $\boldsymbol{d} = \frac{1}{2} \,.\, \frac{60}{12} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

Assim, temos que 60 uniformes serão confeccionados por 12 costureiras em 2 dias e meio.

## DIVISÃO EM PARTES PROPORCIONAIS

Uma outra situação de emprego da expressão algébrica se refere à divisão proporcional de certa quantidade aplicada, também na chamada regra de sociedade. Os exemplos a seguir ilustram estas situações:

**21.** Uma herança de R$ 280.000,00 foi repartida entre três pessoas em partes diretamente proporcionais respectivamente ao número de filhos de cada um, que é, respectivamente, 3, 4 e 7. Qual a quantia que coube a cada uma?

A quantia ($\mathbf{q_1}$, $\mathbf{q_2}$, $\mathbf{q_3}$) que cabe a cada uma das pessoas pode ser representada, respectivamente, pelas expressões

$\mathbf{q_1} = k \,.\, \mathbf{p_1}$

$\mathbf{q_2} = k \,.\, \mathbf{p_2}$

$\mathbf{q_3} = k \,.\, \mathbf{p_3}$

onde k é a taxa de proporcionalidade e $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$ **e** $\mathbf{p_3}$, a parte proporcional na herança, correspondente a cada pessoa.

Sendo a parte recebida por cada pessoa diretamente proporcional a 3, 4 e 7 (número de filhos de cada herdeiro), então o total da herança (soma das quantias recebidas) é diretamente proporcional à soma da quantidade de filhos, e vai representar a taxa de proporcionalidade, que é comum para todos.

Isto é: $q_1 + q_2 + q_3 = k \,.\, p_1 + k \,.\, p_2 + k \,.\, p_3$ ou $q_1 + q_2 + q_3 = k \,.\, (p_1 + p_2 + p_3)$

Então: $k = \dfrac{p_1 + p_2 + p_3}{q_1 + q_2 + q_3} = \dfrac{280.000{,}00}{3+4+7} = 20.000{,}00$

Assim, para determinarmos a quantia recebida pela primeira pessoa, temos a expressão:

$\mathbf{q_1} = 20.000{,}00 \,.\, 3 = R\$60.000{,}00$

Da mesma maneira, calculamos a quantia recebida pela segunda pessoa:

$\mathbf{q_2} = 20.000{,}00 \,.\, 4 = R\$80.000{,}00$

E a parte que cabe à terceira pessoa

$\mathbf{q_3} = 20.000{,}00 \,.\, 7 = R\$140.000{,}00$

**22.** No primeiro ano de funcionamento de uma empresa, foi registrado um lucro de R$ 150.000,00, que seria distribuído entre seus três sócios. Se o primeiro foi o sócio fundador e entrou com um capital de R$ 320.000,00;o segundo entrou para a sociedade 3 meses após a abertura da empresa, com um capital de R$ 450.000,00; e o terceiro aplicou R$580.000,00 nos últimos 6 meses de funcionamento, qual a parte do lucro de cada sócio?

Neste caso, o lucro de cada sócio é diretamente proporcional ao tempo em que seu capital foi empregado e também diretamente proporcional ao valor do capital empregado.

Considerando $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_2}$ e $\mathbf{L_3}$, $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ e $\mathbf{c_3}$, **e** $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_2}$ e $\mathbf{t_3}$, respectivamente, o lucro, o capital aplicado e o tempo (em meses) de permanência na sociedade, de cada sócio, teremos as seguintes expressões algébricas representativas desta situação:

$$\mathbf{L_1} = k \cdot \mathbf{c_1} \cdot \mathbf{t_1}$$

$$\mathbf{L_2} = k \cdot \mathbf{c_2} \cdot \mathbf{t_2}$$

$$\mathbf{L_3} = k \cdot \mathbf{c_3} \cdot \mathbf{t_3}$$

Encontramos, então, o valor de k (**taxa de proporcionalidade – igual para todos**), por meio da soma dessas expressões, ou seja,

$$\mathbf{L_1} + \mathbf{L_2} + \mathbf{L_3} = k \cdot (\mathbf{c_1} \cdot \mathbf{t_1} + \mathbf{c_2} \cdot \mathbf{t_2} + \mathbf{c_3} \cdot \mathbf{t_3})$$

que nos leva ao valor de

$$k = \frac{150.000,00}{320.000,00x12 + 450.000,00x9 + 580.000,00x6} \quad \text{ou} \quad k = \frac{5}{379}$$

Conhecendo a taxa de proporcionalidade, podemos determinar o lucro de cada sócio, por meio das expressões representativas de cada um. Assim, teremos:

$$\mathbf{L_1} = \frac{5}{379} \cdot 320.000,00 \cdot 12 = R\$50.659,63$$

$$\mathbf{L_2} = \frac{5}{379} \cdot 450.000,00 \cdot 9 = R\$53.430,08$$

$$\mathbf{L_3} = \frac{5}{379} \cdot 580.000,00 \cdot 6 = R\$45.910,29$$

## TRABALHANDO COM ESCALAS

Ao observarmos a planta de uma construção, ou a confecção de um mapa, também nos deparamos com grandezas proporcionais e que podem ser expressas por meio de uma expressão algébrica, na qual a escala de confecção da planta e/ou do mapa é a taxa de proporcionalidade, por exemplo:

**23.** Em um mapa, a distância entre duas cidades é 4 cm. Se a distância real entre estas cidades é 2000km, qual a distância real entre outras duas cidades que nesse mapa é dada por 7 cm?

Considerando **d** a distância no mapa e **D** a distância real, temos a expressão:

$$\mathbf{d} = k \cdot \mathbf{D}$$

sendo 2.000km = 200.000.000 cm, para a situação descrita acima, teremos :

$$4 = k \cdot 200.000.000 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4}{200.000.000} \quad \text{ou} \quad k = \frac{1}{50.000.000}$$

que representa a escala em que o mapa foi confeccionado, ou seja, que cada 1cm no mapa representa 50.000.000cm da realidade, ou ainda 1cm para cada 500km.

Então, a distância real entre duas cidades que nesse mapa é 7cm, pode ser encontrada por meio da expressão:

$$7 = \frac{1}{500}\,\mathbf{D}\,, \quad \text{ou seja,} \quad \mathbf{D} = 3500\text{km}$$

**24.** A sala de uma casa de 5m de comprimento foi representada na planta por 2,5cm. Qual a largura de um quarto dessa casa, que nessa planta mede 1,5cm?

Podemos determinar a escala em que foi confeccionada a planta, usando a expressão:

$$\mathbf{d} = k.\,\mathbf{D}$$

na situação apresentada, ou seja, com as medidas (em centímetros) real e na planta do comprimento da sala

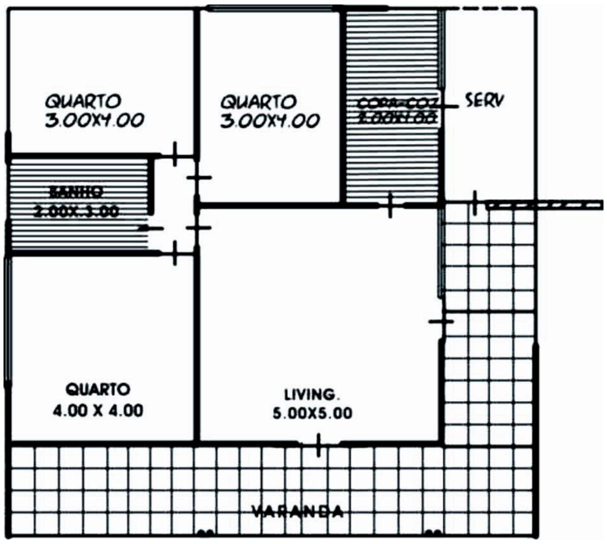
$$2{,}5 = k \cdot 500 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{200}$$

Conhecendo a escala, podemos encontrar a largura real de um quarto desta casa, que na planta mede 1,5cm

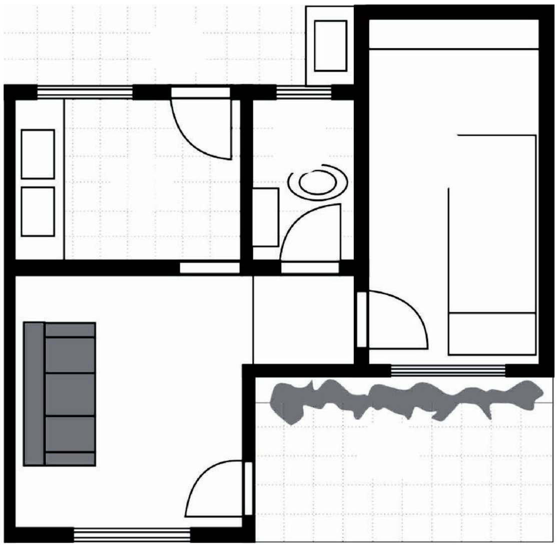
$$1{,}5 = \frac{1}{200} \cdot \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = 300 \text{ cm} = 3 \text{ metros}$$

Nestas atividades 25, 26 e 27, os alunos são desafiados a trabalhar com escalas e com medidas, que podem ser padronizadas ou não.

**25.** Apresente aos alunos a planta de uma casa e peça que, com uma régua, tirem as medidas dos compartimentos apresentados na planta para que, relacionando-os com as medidas reais que estão indicadas, determine a escala em que a planta foi confeccionada.




**26.** Apresente aos alunos a planta da casa abaixo com a escala, por exemplo, 1:100. Os alunos devem medir os compartimentos apresentados na planta e encontrar as dimensões reais desses compartimentos da casa.



**27.** Em uma foto, a altura de um monumento mede 2,5cm. Na ampliação desta foto, a altura do mesmo monumento passou a ser 3,5cm. Se a foto original era de tamanho 15x10 (comprimento x largura), qual o tamanho da foto ampliada?

Consideremos a expressão:

$$\mathbf{A} = k.\ \mathbf{O}$$

onde **A** é o tamanho na foto ampliada e **O** é o tamanho na foto original, encontramos, assim, a taxa de proporcionalidade

$$3{,}5 = k\ .\ 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad k = 1{,}4$$

E, assim, podemos encontrar o comprimento e a largura da foto ampliada

$$\mathbf{A} = 1{,}4\ .\ 15 \ \Rightarrow\ \mathbf{A} = 21 \quad \text{e} \quad \mathbf{A} = 1{,}4\ .\ 10 \ \Rightarrow\ \mathbf{A} = 14$$

Como vemos, a foto, que era um retângulo de dimensões 15 por 10, passa a ser um retângulo de 21 x 14. Isso equivale a dizer que as fotos são semelhantes à razão 1,4.

**Figuras semelhantes então, são figuras que têm a mesma forma e medidas proporcionais.**

Consideremos os retângulos abaixo como duas figuras semelhantes:


Então, podemos dizer que:

$$x = k\ .\ z$$

e $\quad y = k\ .\ w,$

onde k é a razão de semelhança ou a taxa de proporcionalidade.

Sendo $P_1$ o perímetro do maior e $P_2$ o perímetro do menor, temos

$P_1 = 2x + 2y$ e $P_2 = 2z + 2w$

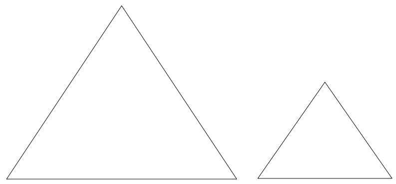
como $x = k\ .\ z$ e $y = k\ .\ w$, então:

$$P_1 = 2\ .\ k\ .\ z + 2\ .\ k\ .\ w = k\ (2z + 2w) = k\ .\ P_2$$

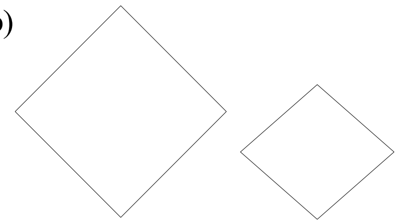
**ATIVIDADES PROPOSTAS:**

**28.** Considere os pares de figuras semelhantes descritas abaixo, cujas medidas são proporcionais de razão k, e, em cada caso, relacione os perímetros dessas figuras.

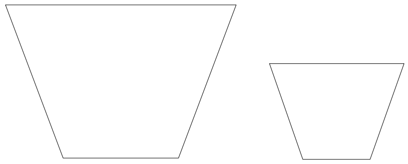
a)



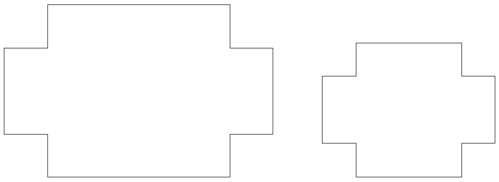
b)



c)



d)



Chegando, assim, a dizer que:

**A razão de semelhança entre duas figuras, dada pela taxa de proporcionalidade constante entre as dimensões das figuras, é a mesma entre o perímetro dessas figuras.**

Vejamos, agora, qual a relação entre as áreas de duas figuras semelhantes.

Nos retângulos considerados temos:

$A_1 = x.y$

e $A_2 = z.w$,

se $x = k . z$ e $y = k . w$, então

$A_1 = k . z . k . w = k^2 . z . w = k^2 . A_2$.

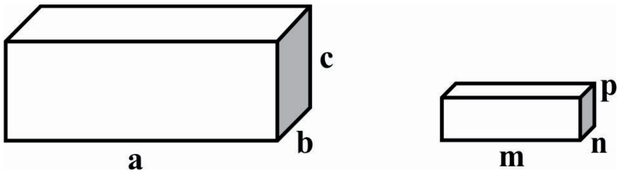
**ATIVIDADE PROPOSTA:**

**29.** Considerando os pares de figuras da atividade anterior, estabeleça, em cada caso, relações entre as áreas das figuras.

Isso feito nos permite dizer que:

**A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança entre as figuras.**

Consideremos agora como semelhantes os paralelogramos abaixo, ou seja, suas dimensões são proporcionais,




Assim sendo, temos:

$a = k \cdot m$ ;

$b = k \cdot n$

e $c = k \cdot p$

Sabemos que o volume de cada sólido é dado pelo produto de suas dimensões, isto é:

$V_1 = a \cdot b \cdot c$

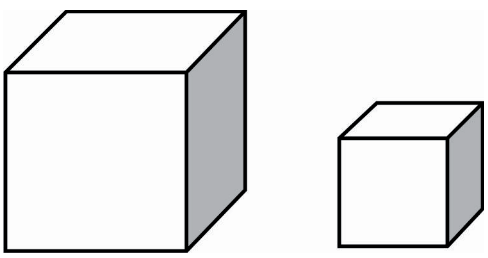
e $V_2 = m \cdot n \cdot p$

Temos então

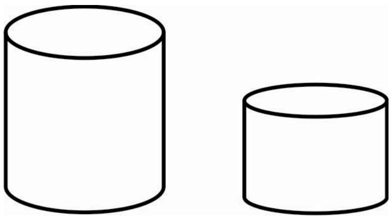
$V_1 = k \cdot m \cdot k \cdot n \cdot k \cdot p = k^3 \cdot m \cdot n \cdot p = k^3 \cdot V_2$

**30.** Considere agora os pares de figuras semelhantes abaixo, cujas dimensões têm taxa de proporcionalidade k, e compare seus volumes

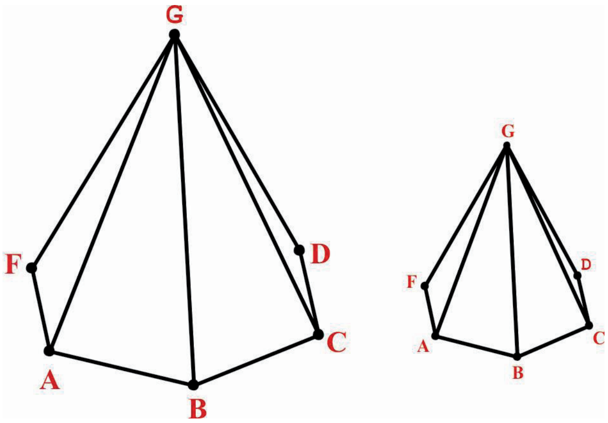
I)



II)



III)




Verificamos, então, que:

**A razão entre os volumes de duas figuras semelhantes é o cubo da razão de semelhança entre as figuras**

**31.** Na planta de uma casa, a sala, cujas dimensões reais são 5 e 3 metros, está representada por um retângulo de 2,5cm x 1,5cm. Verifique a relação entre os perímetros da sala, o real e o da planta.

A expressão que representa a semelhança entre as medidas reais da sala e da sua representação na planta é:

2,5= k . 5, com relação ao comprimento

e 1,5 = k . 3, com relação à largura.

O que nos permite encontrar à escala de confecção da planta ou taxa de proporcionalidade

$$k = \frac{1}{2}$$

Sendo o perímetro da sala igual à soma das medidas dos lados dessa figura, temos:

$$2{,}5 + 1{,}5 + 2{,}5 + 1{,}5 = k.\ 5 + k.3 + k.5 + k.3$$

$$8 = k\,(5 + 3 + 5 + 3) \quad \text{ou} \quad 8 = k\ .\ 16 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

**32.** Encontremos agora a razão entre as áreas das salas representadas no exemplo anterior, isto é, determinemos a taxa de proporcionalidade entre as duas áreas, a partir da expressão:

$$A_1 = k\ .\ A_2.$$

A área é o produto de duas dimensões, logo:

$$A_1 = 2{,}5\ .\ 1{,}5 \quad \text{e} \quad A_2 = 5\ .\ 3$$

assim, teremos:

$$2{,}5\ .\ 1{,}5 = k\ .\ 5\ .\ 3 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{4}$$

**33.** Na maquete de uma casa, o telhado, que tem a forma de uma pirâmide quadrangular regular, apresenta uma altura de 10cm, sendo a base um quadrado com $300cm^2$ de área. Se na realidade o telhado deve ter 3m de altura, quantos $m^2$ de área deverá ter a base deste telhado?

A expressão que permite encontrar a taxa de proporcionalidade entre o telhado apresentado na maquete e o telhado real é:

$$300cm = k\ .\ 10cm$$

Temos então: $k = 30$

Então, a expressão que permitirá encontrar a área da base do telhado real é:

$$A = k^2\ .\ 300cm^2$$

Com $k^2 = 900$

Temos: $A = 900\ .\ 300 = 270.000cm^2 = 27m^2$

**34.** Dois depósitos, geometricamente semelhantes, têm a forma de um paralelepípedo retângulo. O primeiro deles tem, em metros, dimensões iguais a 6, 9 e 12; e as dimensões do segundo são, também em metros, iguais a 4, 6 e 8. Qual a razão de semelhança entre seus volumes?

Sendo os depósitos geometricamente semelhantes, podemos determinar a razão de semelhança entre eles, que é dada pelas expressões

$$\left.\begin{array}{l} 6\,.\,k = 4 \\ 9\,.\,k = 6 \\ 12\,.\,k = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad k = \frac{2}{3}$$

O volume é o produto das 3 dimensões, logo, o volume do depósito maior será dado por

$V_1 = 6\ .\ 9\ .\ 12\ ^3$

e o do depósito menor por $V_2 = 4\ .\ 6\ .\ 8.$

Como $6 = k\ .\ 4$, $9 = k\ .\ 6$ e $12 = k\ .\ 9$, podemos dizer que:

$$V_1 = (k\ .\ 4)\ .\ (k\ .\ 6)\ .\ (k\ .\ 8) = k^3\ (4\ .\ 6\ .\ 8) = k^3\ .\ V_2$$

Como sabemos que $k = \dfrac{2}{3}$, então:

$$V_1 = \frac{8}{9}\ .\ V_2$$

**ATIVIDADES PROPOSTAS:**

**35.** Utilizando o mapa rodoviário do Estado do Pará apresentado abaixo e observando a escala em que o mesmo foi confeccionado, podem ser elaboradas atividades diversas acerca dos assuntos tratados nesse texto, como cálculo da

- distância real, em km, entre duas cidades paraenses;
- área ocupada pelo Estado.

São atividades que além de trabalhar as expressões algébricas e as relações entre figuras semelhantes, ainda permitem explorar o uso de instrumentos e de sistemas de medidas.


**36.** Sugira aos alunos que escolham um objeto cuja forma gostariam que fosse a de uma caixa d'água. Em seguida, peça que tirem as dimensões do objeto e também que verifiquem a capacidade, em litros, desse objeto (o que pode ser feito usando uma medida de litro).

Após decidirem qual a capacidade que desejam para a caixa d'água, faça-os comparar com a do objeto escolhido, através de uma expressão algébrica, e por meio de semelhança, encontrar as dimensões que deve ter a caixa d'água.

**37.** Uma liga metálica contém 92% de prata e o resto de ouro. Quanto há de ouro em 75kg dessa liga?

Aqui o termo 92% de prata denota que em 100 quilos da liga contém 92 Kg de prata e 8 Kg de ouro (ou 8% de ouro), pois 92Kg de prata + 8Kg de ouro = 100Kg da liga. Em vista disso, observamos que quanto menor a quantidade da liga, menor será, proporcionalmente, a quantidade de ouro nela contida, ou seja, as grandezas quantidade de ouro (O) e quantidade da liga (L) são diretamente proporcionais e, portanto, teremos:

$$O = t \,.\, L$$

Como em 100 Kg de liga (L = 100) 8Kg de ouro (O = 8), podemos calcular a taxa de proporcionalidade (t).

$$8 = t\,(100)$$

$$t = \frac{8}{100} = 0{,}08, \text{ ou seja, } \; t = 8\%$$

Agora podemos calcular a quantidade de ouro (O) existente em 75 kg dessa liga (L = 75) usando a *expressão algébrica* seguinte :

$$O = 0{,}08\ L$$

$$O = 0{,}08 \,.\, 75 \quad \text{ou seja} \qquad O = 6 \text{ Kg de ouro}$$

**38.** Maria comprou um par de sapatos que custava 100 reais. O pagamento foi efetuado a vista com 30% de desconto.Quanto ela pagou pelo sapato?

30% denota 30 reais em cada 100 reais (é a taxa de proporcionalidade) e observamos que o valor do desconto (d) é diretamente proporcional ao valor do sapato (s), o que corresponde a seguinte expressão algébrica :

$$d = 0{,}30\ s$$

desse modo, se o sapato custa 100 reais (s = 100), o valor do desconto (d) será:

$$d = 0{,}30 \,.\, 100 \text{ ou seja } d = 30 \text{ reais}$$

e, portanto, o valor do sapato à vista é:

$$100 - 30 = 70 \text{ reais}$$

**39.** Jeane comprou uma máquina fotográfica digital que custava 200 reais, mas, como pagou à vista, obteve um desconto de 20%. Quanto Jeane pagou pela máquina?

Do mesmo modo que o problema anterior, 20% denota 20 reais em cada 100 reais e podemos, então, escrever a *expressão algébrica* para o desconto (d) e o valor da máquina (m) por:

$d = 0{,}02.m$

assim, se m =200, teremos o valor desconto dado por

$d = 0{,}20.200$

ou seja:

d = 40 reais de desconto

e, portanto, Jeane pagou pela máquina:

200 – 40 = 160 reais

Vamos representar o que significa cada item do problema.

200 reais : Chamamos de capital e denotamos em geral por c.

20%: Chamamos de taxa e denotamos em geral por t.

O valor do desconto que foi obtido através da taxa percentual e do capital denomina a porcentagem e denotamos por p.

Como esses valores são grandezas diretamente proporcionais, podemos escrever a seguinte *expressão algébrica* :

$p = c\ .\ t$

**40.** Carlos comprou uma televisão de 695 reais com desconto de 18%. Quanto pagou pelo aparelho?

Aqui só precisamos saber quanto é a porcentagem de 695 correspondente a 18% e, como já observamos, temos o seguinte:

$c = 695$ e $t = 18\% = 0{,}18$

então:

$p = 0{,}18\ .\ 695$ ou seja $p = 125{,}10$ reais

assim, Carlos pagou pela televisão:

695 – 125,10 = 569,90 reais.

Outro modo de resolver esse problema é operarmos diretamente com os valores percentuais como demonstramos a seguir.

Como Carlos obteve um desconto de 18% do total e sabendo que tirando 18% de 100% restam 82%, então, Carlos pagou 82% do preço do televisor. Nesse caso, a porcentagem fornece diretamente o valor pago com desconto.Algebricamente escrevemos:

$$p = t \cdot c$$

e observando que 100% = 1 e 18% = 0,18 e c = 695

$$p = (1- 0{,}18) \cdot 695$$

$$p = 0{,}82 \cdot 695, \quad \text{ou seja,} \quad p = 569{,}90 \text{ reais}$$

É importante observar que quando tratamos de problemas com desconto, a *expressão algébrica* pode ser escrita por:

$$p = (1 - t) \cdot c$$

onde t é a taxa de desconto, como exemplificado no problema anterior. No caso de acréscimo, a *expressão algébrica* passa a ter a forma seguinte:

$$p = (1 + t) \cdot c$$

onde t é a taxa de acréscimo. O problema a seguir exemplifica essa situação.

**41.** Como professor na Escola Rio Caeté, Carlos recebia salário de 1950 reais. Atualmente, Carlos obteve um reajuste de 16%. Qual é o seu novo salário?

Aqui, a taxa de acréscimo é 16% e, portanto:

$$p = (1 + 0{,}16) \cdot 1950$$

$$p = 1{,}16 \cdot 1950$$

$$P = 2262$$

O novo salário de Carlos é de 2262 reais.

**42.** Adilson foi ao comércio para comprar uma bicicleta. Na loja **A** lhe ofereceram uma bicicleta que custava 200 reais, com 20% de desconto para pagamento à vista. Na loja **B** lhe ofereceram uma bicicleta da mesma marca com o valor 10% menor que na loja A, sendo que para pagar à vista Adilson terá ainda um desconto de 10% .Qual é a melhor proposta para Adilson?

Situação na Loja A:

$$p = (1 - 0{,}20) \,.\, 200$$

$$p = 0{,}80 \,.\, 200, \text{ ou seja, } p = 160 \text{ reais}$$

A bicicleta custará na Loja A 160 reais

Situação na Loja B

Primeiro precisamos encontrar o valor da bicicleta na Loja B, que é 10% mais barata que na Loja A.

$$p = (1 - 0{,}10) \,.\, 200$$

$$p = 0{,}90 \,.\, 200 = 180$$

O valor da bicicleta na Loja B é 180 reais. Como Adilson quer comprar à vista, ele terá ainda um desconto de 10% sobre o valor da bicicleta que é 180 reais, e, portanto:

$$p = (1 - 0{,}10) \,.\, 180$$

$$p = 0{,}90 \,.\, 180 = 162$$

O valor da bicicleta à vista na Loja B é R$162,00.

Observando que o preço à vista na Loja A é R$ 160,00 e na Loja B é R$ 162,00, Adilson optará por comprar a bicicleta na Loja A, que fica mais barato pagando à vista.

**43.** Uma calculadora foi vendida com desconto de 25% por 78 reais. Qual era o seu preço?

Aqui, sabemos o valor com desconto p = 78 e queremos encontrar o valor inicial do capital c .

$$p = (1 - 0,\, 25) \,.c \quad \text{ou} \quad p = 0{,}75 \,.\, c$$

$$78 = 0,\, 75 \,.\, c \qquad\qquad c = \frac{78}{0{,}75} = 104$$

Portanto, o seu preço era de 104 reais.

**44.** Um professor de nível médio recebe salário líquido no valor de 1360 reais, onde consta o seguinte desconto: 11% de INSS e 8% de IR. Calcule o salário bruto desse professor, sabendo que o desconto do IR incide após o desconto do INSS.

Primeiramente fazemos o desconto do INSS com a taxa de (1 - 0, 11) e a seguir o desconto do IR pela taxa (1- 0,08), ou seja, algebricamente isso pode ser escrito por:

$$p = (1 - 0,08)\ .\ (1 - 0,11)\ .\ c$$

ou

$$p = 0,92\ .\ 0,89\ .\ c$$

Como o salário líquido é p = 1360, tem

$$1360 = 0,92\ .\ 0,89\ .\ c$$

c = R$ 1660, 97 é o salário bruto

**45.** No início do plano real o salário mínimo era de 70 reais, enquanto isso, o dólar estava cotado em 0,847 reais. Hoje o salário mínimo é 262 reais, enquanto o dólar é cotado a 3 reais e 15 centavos. Encontre a taxa de variação tanto do dólar quanto do salário mínimo.

Como o salário mínimo é, hoje, 262 e no início do plano real era 70, então houve um acréscimo e, portanto, a *expressão algébrica* será:

$$P = (1 + t)\ .\ C$$

e

$$262 = (1 + t)\ .\ 70 \quad \text{ou} \quad 1 + t = \frac{262}{70}$$

$$1 + t = 3,7429 \quad \text{ou} \quad t = 2,7429$$

$$t = 274,29\%$$

Para o caso do dólar, também houve acréscimo e a *expressão algébrica* é a mesma.

$$P = (1 + t)\ C$$

$$3,15 = (1+ t)\ .\ 0,847$$

$$1 + t = \frac{3,15}{0,847} \quad \text{ou} \quad 1+ t = 3,719$$

$$t = 2,719$$

$$t = 271,9\%$$

**46.** O IPVA de um carro é cobrado na base de 3% sobre o valor do carro e pode ser pago de uma das seguintes formas:

a) À vista com desconto de 5%.

b) Em 03 parcelas mensais e iguais a $\frac{1}{3}$ do valor sem desconto.

Se denotarmos por p o valor do IPVA e por c o valor do carro, teremos a seguinte *expressão algébrica* que relaciona essas grandezas :

p = 0,03 . c (O IPVA, p é 3% do valor do carro c)

Assim, podemos estabelecer as *expressões algébricas* para cada situação:

a) Expressão para o cálculo do IPVA à vista.

Se I denota o valor do IPVA com desconto de 5%, então

$I = (1 - 0{,}05)\ p$ ou $I = 0{,}95 \cdot p$

que pode ser expresso em função do valor do carro pela *expressão algébrica:*

$I = 0{,}95 \cdot (0{,}03 \cdot c)$ ou $I = 0{,}0285 \cdot c$

b) Expressão para o cálculo das parcelas do IPVA.

Se denotarmos por m a mensalidade do IPVA, então, a *expressão* algébrica que relaciona essas grandezas é:

$$m = \frac{p}{3}$$

ou

$$m = \frac{(0{,}03\,c)}{3} = 0{,}01c$$

**47.** No problema anterior, supondo um carro cujo valor é de 25 mil reais, pergunta-se:

a) Qual o valor do IPVA desse carro?

b) Se o pagamento for à vista, qual será o valor a ser pago?

c) Se o proprietário optar pelo pagamento em 03 parcelas iguais, qual será o valor de cada prestação?

a) p = 0,03 c

p = 0,03 . 25000

p = 750

O valor do IPVA é de 750 reais

b) I = 0,0285 c

I = 0,0285 . 25000

I = 712,50

O valor a ser pago será de 712 reais e 50 centavos

c) m = 0,01c

m = 0,01 . 25000

m = 250

Cada parcela corresponderá a 250 reais

**48.** Complete a tabela a seguir, mantendo as taxas de cobrança da questão anterior.

| VEÍCULO | IPVA | À VISTA | 3 VEZES |
|---|---|---|---|
| 30000 | | | |
| | | | 230 |
| 18000 | | | |
| | | 690 | |
| | | 620 | |
| | 540 | | |

**49.** Quatro eletricistas fazem a instalação elétrica de uma casa em 20 dias. Em quantos dias dez eletricistas fariam a instalação elétrica da mesma casa?

Assim, se a quantidade de eletricistas é representada por **e** e a quantidade de dias por **d**, a expressão algébrica correspondente é:

$d = \frac{t}{e}$

Isto quer dizer que quando uma grandeza aumenta a outra grandeza reduz ao mesmo modo, por exemplo, quando uma duplica a outra fica reduzida à metade ou quando uma é reduzida a um terço a outra fica triplicada.

Para responder à pergunta enunciada, precisamos primeiro determinar a constante **t** e, para isso, tomamos a informação posta no enunciado de que quatro eletricistas (**e**) realizam a instalação em vinte dias (**d** ) e efetuamos os cálculos abaixo.

$20 = \frac{t}{4}$ ou seja $k = 80$

e, assim, teremos a expressão algébrica para o enunciado

$$d = \frac{80}{e}$$

e podemos agora obter o número de dias (d) que dez eletricistas (**e = 10**) fariam o mesmo trabalho.

$$d = \frac{80}{10}$$

$$d = 8$$

**50.** Um acampamento militar com oitenta comandados tem suprimento para dez dias. Sabendo-se que chegaram mais vinte soldados, pergunta-se: para quantos dias terão suprimentos, considerando-os inalteráveis?

| Dias (d) | Soldados(s) |
|---|---|
| 10 | 80 |

Como esses valores são grandezas inversamente proporcionais, podemos escrever a seguinte *expressão algébrica* :

$$d = \frac{t}{s}$$

Substituindo d e s na expressão, teremos:

$$10 = \frac{t}{80}$$

$$t = 10 \,.\, 80$$

$$t = 800$$

e, portanto:

$$d = \frac{800}{s}$$

Agora, substituindo s por 100, que é o novo número de soldados:

$$d = \frac{800}{100}$$

$$d = 8$$

De acordo com a resolução, terão suprimento para oito dias

**51.** Um muro de 20 metros é construído em 3 dias com 5 pedreiros. Em quantos dias seriam construídos 30 metros de muro com 6 operários?

| Dias (d) | metros (m) | pedreiros (p) |
|---|---|---|
| 3 | 20 | 5 |
| .....d | .... 30 ... | 6 |

$$d = t \cdot \frac{m}{p}$$

Observa-se que a grandeza metros é diretamente proporcional a dias, enquanto que a grandeza pedreiro é inversamente proporcional a dias. Assim, tomando os valores de **d** , **m** e **p,** calculamos **t.**

$$3 = t \cdot \frac{20}{5}$$

$$t = \frac{15}{20}$$

$$t = \frac{3}{4}$$

e, portanto:

$$d = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{p}$$

tomando agora os novos valores para **m** e **p**, calculamos **d**:

$$d = \frac{3}{4} \cdot \frac{30}{6}$$

$$d = \frac{15}{4} \quad \text{ou} \quad d = 3 + \left(\frac{3}{4}\right)$$

Como mostra a questão, o muro seria construído em 3 dias se os pedreiros trabalhassem 18 horas, pois $\frac{3}{4}$ de um dia que corresponde $\left(\frac{3}{4}\right)$ . 24 horas = 18 horas.

**52.** Usando os dados da questão anterior, encontre os valores que completam a tabela abaixo.

| dias | metros | Pedreiros |
|---|---|---|
| 3 | 20 | 5 |
| | | |
| | 30 | 6 |
| 4 | 36 | |
| 9 | | 10 |
| 6 | | 8 |
| 5 | 40 | |

**53.** Para pintar 20 metros de muro de 80 centímetros de altura foram gastas 5 latas de tintas. Quantas latas serão necessárias para pintar 16 metros de muro de 60 centímetros de altura?

| Muro | altura | latas |
|---|---|---|
| 20 | 80 | 5 |
| 16 | 60 | L |

$$L = h.t.m \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L}{h\,.\,m}$$

$$t = \frac{5}{20.80}$$

$$t = \frac{1}{320}$$

$$L = \frac{1}{320}\,.\ 60\ .\ 16$$

$$L = \frac{960}{320}$$

$$L = 3$$

**54.** Diversificando os valores da questão anterior, complete a tabela abaixo:

| L | h | m |
|---|---|---|
| 5 | 80 | 20 |
| | 60 | 16 |
| 4 | | 32 |
| 9 | | 15 |
| 7 | 20 | |
| 10 | 16 | |

# JUROS
# A MATEMÁTICA DO DINHEIRO

Uma pessoa aplica uma quantia em reais em uma caderneta de poupança. Após certo tempo, ela recebe em troca uma quantia em reais maior do que o valor aplicado.

- A quantia entregue chama-se **capital ( C )**;
- O valor resgatado após certo período chama-se **montante ( M )**;
- A diferença entre o montante e o capital é o **juro ( J )** obtido pela aplicação;
- O termo **taxa ( t )** de juro é a porcentagem do capital num certo período.
- O número de períodos da aplicação é **n**.

Se admitirmos que o juro é diretamente proporcional ao capital aplicado C e ao tempo de aplicação n, então sendo a taxa t a constante de proporcionalidade teremos, a expressão algébrica para o juro dada por:

$$J = t\,C\,n$$

e, dessa forma, o montante M pode ser obtido pela expressão:

$$M = C + J$$

ou

$$M = (1 + t\,n)C$$

**55.** Se considerarmos a aplicação em um período, n = 1, temos:

$$J = tC$$

e

$$M = (1+t)C$$

**56.** Se numa aplicação de renda fixa é feito um depósito de 5 mil reais a uma taxa de juros de 12% durante o período da aplicação, determine o montante dessa aplicação.

Portanto:

$$J = C \, . \, t$$

$$J = 5000 \, . \, 0{,}12$$

$$J = 600$$

Calculando o montante, teremos:

$$M = C + J$$

$$M = 5000 + 600$$

$$M = 5600$$

alternativamente, podemos escrever

$$M = C + J$$

$$M = C + C \, . \, t$$

$$M = C\,(1 + t)$$

$$M = 5000\,(1 + 0{,}12) = 5000 \, . \, 1{,}12 = 5600$$

**57.** Um banco anuncia: aplique hoje três mil reais e retire daqui a três anos 5760 reais. Qual taxa de juro do triênio?.

$$M = C + C \, . \, t$$

$$5760 = 3000 + 3000 \, . \, t$$

$$5760 = 3000\,(1 + t\,)$$

$$1 + t = \frac{5760}{3000}$$

$$1 + t = 1{,}92$$

$$t = 1{,}92 - 1$$

$$t = 0{,}92 \text{ ou } 92\%$$

**58.** Um homem deixou 75% de sua herança à esposa e o restante ao filho. A esposa aplicou a sua parte a 25% ao ano e, depois de um ano, retirou todo dinheiro, num montante de R$ 225.000,00 . O filho aplicou sua parte a 28% ao ano e, depois desse prazo, também retirou todo o dinheiro. Qual foi o montante que filho retirou?

Primeiro vamos calcular o capital da esposa $(C_e)$

$$M = C_e\ (1 + t)$$

$$C_e = \frac{M}{(1+t)}$$

$$C_e = \frac{225000}{(1+0{,}25)}$$

$$C_e = \frac{225000}{(1{,}25)}$$

$$C_e = 180.000$$

Em seguida, vamos obter o capital do filho ($C_f$), observando que o restante que coube ao filho foi 25%. Como os 75% da esposa corresponde a 180.000, temos que o total da herança (H) é dado pela seguinte *expressão algébrica*:

$$C_e = 0{,}75 \,.\, H \quad \text{ou} \quad H = \frac{C_e}{0{,}75}$$

e, desse modo:

$$H = 240000$$

e, assim, o capital do filho ($C_f$) é dado por:

$$C_f = 0{,}25.\ H$$

de onde resulta:

$$C_f = 60000$$

Agora vamos calcular o montante do filho ($M_f$).

$$M_f = C\ (1 + t)$$

$$M_f = 60000\ .\ (1 + 0{,}28)$$

$$M_f = 60000\ .\ 1{,}28$$

$$M_f = 76800$$

Portanto, o filho retirou R$ 76.800,00 reais.

**59.** Ana aplicou metade de uma certa quantia a 1,5% ao mês e outra metade a 1,8% ao mês. Após um mês, ela recebeu 29 reais e 70 centavos de juros. Quanto ela aplicou no total?

Como já sabemos que **j = C . t** e temos um capital dividido em duas partes iguais à taxa de juros diferentes, então, se denotarmos a primeira taxa por t e a segunda por t', teremos a seguinte *expressão algébrica*:

$$J = \left(\frac{c}{2}\right) . \ t + \left(\frac{c}{2}\right) . \ t'$$

substituindo t e t' por seus valores

$$2J = 0{,}015c + 0{,}018c$$

$$2 . 29{,}70 = 0{,}033c$$

$$59{,}4 = 0{,}033c$$

$$c = \frac{59{,}4}{0{,}033}$$

$$c = 1800$$

portanto, a aplicação foi de 1800 reais.

Certamente, você já ficou em dúvida quanto à melhor opção ao se deparar com determinadas ofertas.

Para saber qual é a melhor alternativa, temos que saber a maior taxa de juros que conseguimos aplicar nosso dinheiro.

Vamos supor uma oferta onde um par de tênis custa 100 reais à vista ou 120 reais daqui a 1 mês e sabendo que a maior taxa de juros que conseguimos ao aplicar esse dinheiro é de 2% ao mês.

Em seguida, calculamos qual é o capital que devemos aplicar hoje para podermos pagar 120 reais daqui a um mês.

Valor presente = C

$$C + C . t = 120$$

$$C (1 + t) = 120$$

$$C = \frac{120}{(1 + t)}$$

$$C = \frac{120}{(1 + 0{,}02)}$$

$$C = 117{,}65$$

Como podemos observar, vimos que para comprar o par de tênis daqui a um mês, teríamos que aplicar hoje 117 reais e 65 centavos, portanto, sendo mais vantajoso comprar o tênis pelo preço à vista, ou seja, 100 reais.

**60.** Na loja Megamagazine, Kelly compra uma calça que está na seguinte oferta a 70 reais à vista, ou 85 reais para pagamento com 30 dias. Sabendo que a maior taxa de juros encontrada no mercado é de 1,5% ao mês, qual a melhor oferta de pagamento para Kelly?

$$C + C \,.\, t = 85$$

$$C\,(1 + t) = 85$$

$$C = \frac{85}{1 + t}$$

$$C = \frac{85}{(1 + 0{,}015)}$$

$$C = 83{,}74$$

Kelly deve optar pelo pagamento à vista, já que para comprar a calça a prazo teria que aplicar hoje 83 reais e 74 centavos a uma taxa de 1,5% ao mês para obter um montante de 85 reais daqui a um mês.

**61.** Luciana foi a uma casa de material de construção comprar um vaso sanitário, onde consta a seguinte oferta: 85 reais à vista ou 92 reais para 30 dias. Sabendo que seu dinheiro vale 14% de juro ao mês, qual a melhor oferta para Luciana.

$$C + C \,.\, t = 92$$

$$C\,(1 + t) = 92$$

$$C = \frac{92}{1 + t}$$

$$C = \frac{92}{(1 + 0{,}14)}$$

$$C = 80{,}70$$

Neste caso, Luciana precisa apenas de 80 reais e 70 centavos, hoje, para comprar o vaso sanitário com pagamento para daqui a 30 dias. Portanto, a melhor oferta para Luciana é o pagamento a prazo.

**62.** Roberto comprou um televisor em 4 parcelas de 120 reais, sendo que atrasou o pagamento da última parcela em 30 dias, pagando 18 reais de juros. Determine a taxa percentual cobrada referente à última parcela.

$$J = t \,.\, C$$

$t = ?$ $\qquad t = \dfrac{j}{c}$

$c = 120$

$j = 18$ $\qquad t = \dfrac{18}{120}$

$t = 0,15$ ou $t = 15\%$

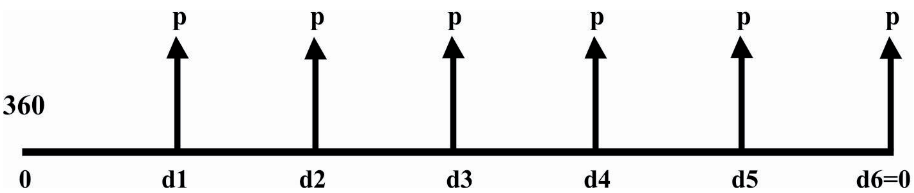
Muitos problemas de financiamento do nosso cotidiano enquadram-se em situações um pouco mais complexas. Um deles é o problema de financiamento de um dado bem. Aqui discutimos, através de exemplos, o problema de financiamento com o auxílio de polinômios, de forma a dar significado deste conteúdo aos alunos do ensino fundamental.

## O PROBLEMA DO FINANCIAMENTO

Abordaremos, agora, o problema de financiamento, com parcelas fixas, encontradas naturalmente em nosso cotidiano através de aquisição de bens de consumo como eletrodomésticos, eletroeletrônicos, carros etc. Para isso, utilizaremos as operações com polinômios de forma a permitir uma abordagem ao nível do ensino fundamental.

Considere o problema de aquisição de um fogão, cujo preço a vista foi de R$ 360,00, financiado em 6 prestações mensais fixas e iguais, com o primeiro pagamento ocorrendo um mês após a compra. Desejamos conhecer o valor das prestações, sabendo que a taxa de juros é de 5% ao mês.

Esquematicamente, representamos os momentos do pagamento das prestações e das dívidas, abaixo, destacando que no momento 6, a dívida deverá ser quitada e, portanto, nula.




No momento 1, a dívida $d_1$ será

$$d_1 = (1+0,05)360 - p = 360x - p$$

ou seja, a dívida corrigida, por um mês, menos a prestação p paga. De forma similar, temos as dívidas nos outros momentos, dadas pelas seguintes expressões:

$$d_2 = xd_1 - p = 360x^2 - px - p$$

$$d_3 = xd_2 - p = 360x^3 - px^2 - px - p$$

$$d_4 = xd_3 - p = 360x^4 - px^3 - px^2 - px - p$$

$$d_5 = xd_4 - p = 360x^5 - px^4 - px^3 - px^2 - px - p$$

$$d_6 = xd_5 - p = 360x^6 - px^5 - px^4 - px^3 - px^2 - px - p = 0$$

ou ainda:

$$360x^6 = p\,( x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

efetuando os cálculos com x=1+0,05, obtemos

$$p = 70,92$$

que é o valor da prestação que queríamos conhecer.

Note que para o cálculo da prestação foi necessário o valor numérico do polinômio do 5º grau abaixo

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Em geral, esse polinômio terá grau igual a n-1, quando o número de prestações for n. Assim, quanto maior for o número de prestações, maior será o grau do polinômio, o que torna o cálculo do valor numérico extremamente laborioso.Felizmente podemos simplificar esses cálculos como mostramos a seguir, usando o exemplo anterior.

Começamos observando que

$$(x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^6 - 1$$

ou

$$\frac{x^6 - 1}{x - 1} = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Assim, a expressão para o cálculo da prestação torna-se

$$360\, x^6 = p\frac{x^6 - 1}{x - 1}$$

que é sem dúvida menos laborioso.

Em geral, podemos escrever um polinômio do tipo

$$Q(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + .... + x + 1$$

como o quociente da divisão dos polinômios

$$P(x) = x^n - 1 \quad \text{e} \quad P'(x) = x - 1$$

ou melhor

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + ... + 1$$

Dessa forma, podemos escrever uma expressão para o cálculo de prestações de financiamentos de um valor D em parcelas fixas e iguais em n períodos com taxa de juros fixa nos períodos, como segue

$$\boxed{p = \frac{x^n\,(x-1).\,D}{x^n - 1}}$$

Substituindo x=1+t, onde t é a taxa de juro do período, obtemos a expressão usualmente utilizada nos livros de Matemática Financeira.

$$\boxed{p = \frac{(1+t)^n t . D}{(1+t)^n - 1}}$$

Vamos calcular o valor das prestações de um televisor que custa R$ 480,00 à vista, com uma taxa de 4% ao mês durante 3 meses sem entrada e em parcelas iguais.

$$(1 + t)^3 D = p [1+ (1 + t) + (1 + t)^2]$$

$$p = \frac{(1+t)^3 D}{1+(1+t)+(1+t)^2}$$

$$1+ t = x$$

$$p = \frac{x^3 D}{1+x+x^2}$$

$$p = \frac{x^3 \ . \ D}{\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}}$$

$$p = \frac{x^3 \ (x-1) \ .D}{x^3 - 1}$$

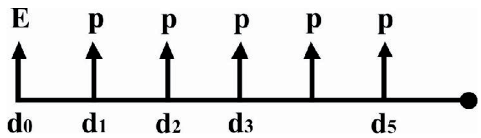
$$p = \frac{(1{,}04)^3 \ . \ 0{,}04 \ . \ 480}{(1{,}04)^3 - 1}$$

p= 172,96

## O Financiamento com Entrada

Consideremos a aquisição de um tênis, cujo preço à vista é R$120,00, que desejamos financiar em 5 prestações fixas e mensais e com entrada, no ato da compra, de R$ 20,00. Se os juros são de 10% ao mês, qual será o valor das prestações?

Esquematicamente representamos, abaixo, o momento da entrada E e os momentos das dívidas d e das prestações p, ressaltando que no momento 5 a dívida $d_5$ deverá ser nula.




Representando a dívida inicial 120=D e a entrada 20=E, e (1+0,1)=x, obtemos da análise do gráfico o que segue:

$d_0 = D - E$

$d_1 = xd_0 - p = (D-E)x - p$

$d_2 = xd_1 - p = (D-E)x^2 - px - p$

$d_3 = xd_2 - p = (D-E)x^3 - px^2 - px - p$

$d_4 = xd_3 - p = (D-E)x^4 - px^3 - px^2 - px - p$

$d_5 = xd_4 - p = (D-E)x^5 - px^4 - px^3 - px^2 - px - p = 0$

de onde resulta

$$p(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (D-E)x^5$$

$$P\frac{x^5 - 1}{x - 1} = (D - E)x^5$$

$$P = \frac{x^5(x-1).(D-E)}{x^5 - 1}$$

Substituindo x=1+0,1 , D=120 e E=20, encontramos:

p=26,38

De forma similar podemos estabelecer a expressão para o cálculo das prestações fixas e iguais em n períodos com taxa t nesses períodos,de um financiamento de uma dívida D com entrada E no ato da compra,por

$$p = \frac{x^n(x-1).(D-E)}{x^n - 1}$$

ou:

$$p = \frac{(1+t)^n \, t \, (D - E)}{(1+t)^n - 1}$$

Suponha, agora, que queiramos ter a entrada igual às prestações restantes. Nesse caso,pela análise do gráfico, temos:

$$p(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (D-p)x^5$$

$$p(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = Dx^5$$

$$p\frac{x^6 - 1}{x - 1} = D\,x^5$$

$$p = \frac{x^5\,(x-1)\,.\,D}{(x^6 - 1)}$$

$$p = \frac{(1,1)^5\ .\ 0,1\ .\ 120}{\left(1,1^6 - 1\right).}$$

$$p \approx 25,05$$

Assim, devemos dar uma entrada de R$ 25,05 e pagar mais 5 prestações mensais de mesmo valor.

A expressão para o cálculo das n prestações, com a primeira paga no ato da compra, pode ser estabelecida de forma similar por:

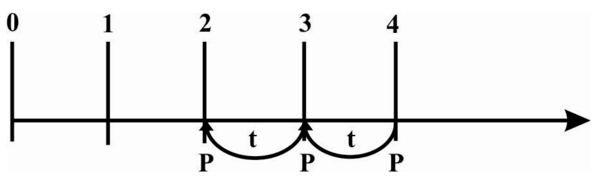
$$p = \frac{x^{n-1}\,(x-1)\,.\,D}{(x^n - 1)}$$

---

Outras situações de financiamento podem ocorrer gerando diferentes ***expressões algébricas***. Abaixo demonstramos mais alguns exemplos.

---

**63.** Helânia fez uma compra na promoção de uma loja, no valor de R$1.200,00, com juros de 10% ao mês dividido em 3 parcelas iguais, começando a pagar as prestações no segundo mês após a compra. Qual o valor de cada prestação?



Tomando o momento 3 como ponto de referência, temos que a dívida D será $(1+t)^3$ D, a prestação do momento 2 é atualizada com os juros e a prestação do momento 4 é amortizada pelos juros .

$$(1+t)^3 D = (1+t)p + p + (1+t)^{-1}p$$

$$(1+t)^3 D = p\,[(1+t) + 1 + (1+t)^{-1}]$$

multiplicando ambos os membros por (1 + t), temos:

$$(1+t)\,.\,(1+t)^3 D = (1+t)\,p\,[(1+t)^{-1} + 1 + (1+t)]$$

$$(1+t)^4 D = p\,[1 + (1+t) + (1+t)^2\,]$$

fazendo (1 + t) = x

$$x^4 D = p\,[1 + x + x^2]$$

$$p = \frac{x^4 D}{1 + x + x^2}$$

$$p = \frac{x^4 D}{\frac{x^3 - 1}{x - 1}}$$

$$p = \frac{x^4 (x-1).D}{x^3 - 1}$$

$$p = \frac{(1{,}1)^4\ .\ (1{,}1 - 1)\ .\ 1200}{(1{,}1)^3 - 1}$$

$$p = 530{,}79$$

> Com postecipação de um mês, ficamos com $\frac{p}{x}$, dois meses $\frac{p}{x^2}$ três meses $\frac{p}{x^3}$, e assim por diante.

**64.** Um aparelho de ar condicionado custa R$1.000,00 à vista e pode ser paga em três prestações mensais iguais. Se são cobrados juros de 6% ao mês sobre o saldo devedor, determine o valor da prestação, supondo que a primeira prestação é paga.

a) No ato da compra;

b) Um mês após a compra;

c) Dois meses após a compra.

**65.** Renata comprou um computador em 6 prestações iguais de R$500,00 cada à taxa de 5% ao mês. Quanto Renata pagará pelo computador já que deseja quitar sua dívida na 3ª prestação?

$$D' = p + (1+t)^{-1}\, p + (1+t)^{-2}\, p + (1+t)^{-3}\, p$$

$$D' = p\,[1 + (1+t)^{-1} + (1+t)^{-2} + (1+t)^{-3}]$$

Fazendo $(1 + t) = x$, temos:

$$D' = p\,[1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3}]$$

Multiplicando ambos os membros por $x^3$ temos:

$$x^3 D' = x^3 p\,[1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{--3}]$$

$$x^3 D' = p\,[1 + x + x^2 + x^3]$$

$$D' = \frac{p\,.\,(x^4 - 1)}{(x-1)\,.\,x^3}$$

$$D' = \frac{500\,.\,\left(1{,}05^4 - 1\right)}{1{,}05^3\,.\,(1{,}05 - 1)}$$

$$D' = 1861{,}62$$

Somando as duas primeiras parcelas atualizadas com as parcelas antecipadas, temos o valor do computador pago por Renata.

$$D = 500(1{,}05)^2 + 500(1{,}05) + 1861{,}62$$

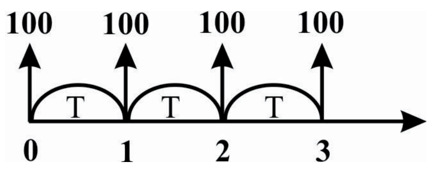
$$D = 2937{,}87$$

Portanto, Renata pagará sua dívida no valor de R$ 2937,87.

**66.** Júnior tem duas opções de pagamento na compra de um televisor, na primeira opção quatro prestações mensais de R$100,00 cada, na segunda opção seis prestações mensais de R$ 69,00 cada (ambas com o primeiro pagamento no ato da compra). Se o dinheiro vale 2% ao mês para Júnior, o que deve preferir?

Para comparar o valor de vários conjuntos de pagamentos, devemos usar o mesmo momento.

**1ª Opção**: A dívida atualizada M será tomada no momento 3.



$$M = (1+t)^3\, p + (1+t)^2\, p + (1+t)\, p + p$$

$$M = p\,[1 + (1+t) + (1+t)^2 + (1+t)^3\,]$$

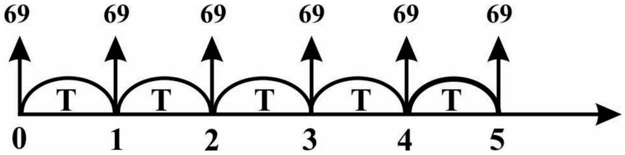
$$M = \frac{p\ .\ (x^4 - 1)}{x - 1}$$

de onde obtemos:

$$M = \frac{100\ .\ \left(1{,}02^4 - 1\right)}{1{,}02 - 1}$$

$$M = 412{,}16$$

**2ª Opção**: Aqui a dívida atualizada M' deverá ser tomada no momento 3, que foi o momento considerado na opção anterior.




$$M' = p + (1+t)\, p + (1+t)^2\, p + (1+t)^3\, p + (1+t)^{-1}\, p + (1+t)^{-2}\, p$$

$$M' = p\,[1 + (1+t) + (1+t)^2 + (1+t)^3 + (1+t)^{-1} + (1+t)^{-2}\,].$$

Multiplicando ambos os membros por $(1+t)^2$, temos:

$$(1+t)^2\, M' = p\,[1 + (1+t) + (1+t)^2 + (1+t)^3 + (1+t)^4 + (1+t)^5\,]$$

fazendo $(1+t) = x$, temos:

$$X^2\, M' = p\,[1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5]$$

$$X^2\, M' = \frac{p\ .\ (x^6 - 1)}{x - 1}$$

$$M' = \frac{p\ .\ x^6 - 1}{x^2\ (x-1)}$$

$$M' = \frac{69\ .\ (1{,}02)^6 - 1}{1{,}02^2\ (1{,}02 - 1)}$$

$$M' = 418{,}36$$

Júnior deve optar pelo pagamento em 4 prestações.

**67.** Pergy tem três opções de pagamento na compra de uma bicicleta:

a) À vista, com 10% de desconto;

b) Em duas prestações mensais iguais a metade do preço da bicicleta, sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra.

c) Em três prestações mensais iguais a um terço do preço da bicleta, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.

Qual a melhor opção para Pergy se o dinheiro vale, para ela, 5% ao mês?

Neste tipo de problema, embora não tenhamos conhecimento do preço do produto, podemos fixá-lo em um valor qualquer, como, por exemplo, o valor D.

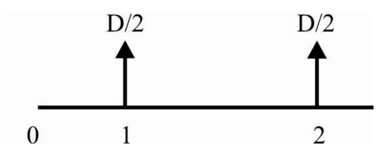
a)


$v_1 = (1 - t)\,D$

$v_1 = D \,.\, 0{,}9$

$v_1 = 0{,}9D$

b) Neste caso, cada prestação será igual à metade do valor D.

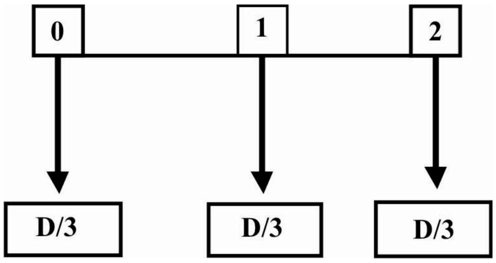



$$V_2 = \frac{p\,.\,(x^2 - 1)}{(x-1)\,.\,x^2}$$

$$V_2 = \frac{(D/2)\,.\,\left(1{,}05^2 - 1\right)}{(1{,}05 - 1)\,.\,1{,}05^2}$$

$$V_2 = 0{,}9297D$$

c) Aqui o valor de cada prestação será um terço do valor D.




$$V_3 = \frac{(D/3)\,.\,(x^3 - 1)}{(x-1)\,.\,x^2}$$

$$V_3 = \frac{(D/3)\,.\,\left(1{,}05^3 - 1\right)}{(1{,}05 - 1)\,.\,1{,}05^2}$$

$$V_3 = 0{,}953133D$$

Portanto, a melhor opção para Pergy é o pagamento à vista com desconto de 10%.

## ATIVIDADES PROPOSTAS

### RECICLAGEM DE LIXO.

**68.** A população urbana de Macapá, capital do Estado do Amapá, tem aproximadamente 270 mil habitantes (IBGE, agosto de 2000), e coleta em média 110 mil kg de lixo por dia. Pergunta-se:

a) Quantos quilos de lixo por dia e por habitante a cidade de Macapá produz?

b) Quantas toneladas de lixos são produzidas por mês em Macapá?

**69.** A maior parte dos resíduos recicláveis em Macapá são vendidos para a cidade de Belém. Materiais como latas de alumínio e metais ferrosos são os mais procurados por sucateiros. Na tabela abaixo, estão os preços de comercialização de alguns materiais reaproveitáveis em novembro de 2000.

| Materiais | Preço R$ |
|---|---|
| Papelão | 25,00 a tonelada |
| Alumínio, cobre. | 1.000,00 a tonelada |
| Garrafas de cervejas | 0,10 a unidade |
| Filmes plásticos | 30,00 a tonelada |

Pergunta-se:

a) Quanto custa cada quilo de papelão, alumínio, cobre e filmes plásticos para os comerciantes?

b) Se um comerciante revender o quilo do alumínio por R$ 2,00 qual o seu lucro em percentuais?

**70.** No Brasil, existem cerca de 500 mil catadores de lixo, que sobrevivem das lixeiras, catam, selecionam e vendem papelões, plásticos, latas e outros resíduos. Se o quilo do papelão custa R$ 2,00 e um catador arrecada uma média diária de 5 kg desse material, qual será sua renda mensal?

**71.** Os "lixões" são o destino da maior parte dos resíduos urbanos produzidos no Brasil, causando graves prejuízos ao meio ambiente, à saúde e à qualidade de vida da população. Veja na tabela abaixo a importância da reciclagem de lixo.

| MATERIAL RECICLADO | PRESERVAÇÃO | DECOMPOSIÇÃO |
|---|---|---|
| 1000 kg de papel | O corte de 20 árvores | 1 a 3 meses |
| 1000 kg de plásticos | Extração de milhares de litros de petróleo | 200 a 450 anos |
| 1000 kg de alumínio | Extração de 5000 kg de minério | 100 a 500 anos |

Fonte: Manual A Embalagem e o Meio Ambiente (1999).

Pergunta-se:

a) Quantas árvores são preservadas se reciclarmos 3,5 toneladas de papel?

b) Se o quilo do alumínio custa R$ 2,00 e o comerciante vender diariamente 1 tonelada desse material, qual será a sua renda mensal?

c) Se 50 catadores de papel catam 2000kg desse material por dia para o processo de reciclagem, se triplicarmos o número de catadores quantas árvores serão preservadas das nossas florestas diariamente?

**72.** Durante o carnaval são coletados cerca de 200 toneladas de latinhas de alumínio. Se 1 kg de alumínio custa R$ 3,00, quanto custam 20kg de alumínio?

**73.** Cada ser humano produz em média 0,5 kg de lixo diariamente. Sabendo que a população total do mundo é aproximadamente 5,6 bilhões, quantos bilhões de quilos de lixo são produzidos semanalmente?

**74.** Existem cerca de 24.400 catadores nos lixões brasileiros e 78% têm mais de 14 anos, quantas crianças menores de 14 anos existem nos lixões?

**75.** Seis catadores de papel catam 20 kg em um dia. Quantos quilos de papel serão arrecadados por 18 catadores em um dia de trabalho?

## ANIMAIS EM EXTINÇÃO

**76.** O comércio ilegal de animais é responsável por cerca de cem espécies que desaparecem diariamente da face da Terra. Estima-se que o tráfico de animais movimenta aproximadamente 10 bilhões de dólares por ano. Quantos bilhões, em reais, o Brasil movimenta, se por ano a participação do Brasil nesse comercio ilegal é de 15% ?

**77.** No mercado interno, um animal da fauna brasileira dificilmente chega a ultrapassar o preço de mil reais. Entretanto, pelo tráfico internacional, os valores são exorbitantes. Veja na tabela abaixo quanto vale, em média, um bicho ilegal no país e no exterior.

| Animais | Brasil R$ | Exterior US$ |
|---|---|---|
| Mico Leão Dourado | 300,00 | 25 mil |
| Onça Pintada | 3 mil | 10 mil |
| Tucano de Bico Preto | 200,00 | 6 mil |
| Veado Campeiro | 2.500,00 | 10 mil |

Pergunta-se:

a) Em reais, quanto custam 5 Micos Leões Dourados vendidos no Exterior pelo mercado ilegal de animais? Dados: 1 US$ é aproximadamente R$ 3,00.

b) Se uma onça pintada custa R$ 3.000,00 no Brasil e é vendida pelo tráfico ilegal de animais para o exterior, qual o lucro dessa venda em percentual?

**78.** No tráfico ilegal de animais, além do dinheiro ilegal, são arrancados entre 12 e 38 milhões de filhotes de aves e mamíferos de nossas matas todos os anos. Destes, acredita-se que apenas 1% chega ao destino final, e o restante morre nas mãos dos traficantes devido a maus tratos. Se 50 filhotes forem arrancados de seu habitat natural quantos morrem antes mesmo de serem comercializados?

**79.** Para cada venda ilegal de uma arara morrem outras nove araras, devido aos maus tratos dos traficantes que, na maioria das vezes, as mantêm em cativeiro muito pequeno, impossibilitando-a de respirar. Vender ilegalmente 12 araras representa a morte de quantas araras?

## DENSIDADE DEMOGRÁFICA

**80.** O censo de 2000 estimou a população do Estado do Pará em 6.195.965, calcule a densidade demográfica desse Estado da região Norte, sabendo que sua área total é de aproximadamente 1247.689,5 km² ?

## ÁGUA

**81.** Calcula-se que atualmente cerca de 1,4 bilhão de pessoas no mundo não tem acesso à água limpa e que a cada 8 segundos morre uma criança por doença relacionada à água, como disenteria e cólera. Quantas crianças morrem semanalmente por causa da poluição da água?

## TABAGISMO

**82.** Segundo dados do Controle de Tabagismo e outros Fatores de Risco de Câncer, o fumo está associado a 30% das mortes por câncer em geral. Com base nesse dado, responda:

a) Se morressem 20 mil pessoas de câncer, quantas morreriam por conseqüência do cigarro?

b) Se em uma cidade a porcentagem de fumantes é de 35% e 500 fumantes deixassem de fumar, o número de fumantes seria reduzido a 1500. Calcule o número de fumantes da cidade e o número de habitantes dessa cidade.

## AIDS

**83.** Sabendo que a principal via de transmissão do vírus HIV é a relação sexual heterossexual sem o uso da camisinha, verifique as regiões que apresentam alto índice de contaminação da Aids.

| | |
|---|---:|
| Sudeste | 68,7% |
| Sul | 16,1% |
| Nordeste | 8,7% |
| Centro Oeste | 4,5% |
| Norte | 2,0% |

Fonte: Unesco 2004

Sabendo que o total de pessoas contaminadas em todo o país é 30.310. Responda:

a) Qual o número de pessoas contaminadas em toda região Sudeste?

b) Qual o total de pessoas contaminadas nas regiões Nordeste e Centro Oeste?

c) Qual o total de pessoas contaminadas nas regiões Sul e Norte do país?

**84.** Entre 1980 e 2003 foram notificados 10.577 casos de Aids em crianças com menos de 13 anos de idade. Sabendo que 83,6% são infectadas pela mãe (transmissão vertical), quantas crianças são infectadas por outros meios de transmissão? (Fonte: Unesco 2004).

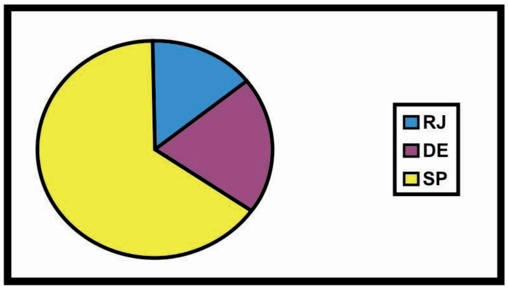
**85.** O Ministério da Saúde contabilizou 30.310 casos de Aids em todo o país desde 1980. Sabendo que a transmissão por via sexual representa 58 % dos casos de Aids, responda:

a) Quantas pessoas são contaminadas pelo vírus HIV por outras vias?

b) Os homens apresentam 71,1% do total, contra 28,8% das mulheres contaminadas com o vírus HIV. Quantos homens e mulheres em todo o país estão contaminados com a doença?

c) A cada uma mulher contaminada com o vírus da Aids, quantos homens apresentam o diagnóstico dessa doença?

**86.** O gráfico mostra os números de casos de Aids no Brasil (1980-1992).




Responda:

a) No Brasil, o total de casos de Aids é de 30 310, São Paulo apresenta 59% do total. Qual o número de casos da cidade de São Paulo?

b) Se no Brasil os casos de Aids chegam a 30 310 e no Rio de Janeiro temos 4 831 casos. Qual a porcentagem do Rio de Janeiro em relação ao Brasil?

c) Com base nos resultados anteriores, nos Demais Estados (DE) qual o total de casos e quanto vale em percentual em relação ao Brasil?

d) Quantos percentuais equivalem o total de casos de Aids do Estado do Rio de Janeiro e de São Paulo, em relação ao Brasil?

## FRAÇÃO

**87.** Represente geometricamente o cálculo das seguintes operações de frações:

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

c) $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}$

d) $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$

e) $\frac{4}{5}+\frac{3}{6}$

f) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

g) $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

h) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$

i) $\frac{5}{6}-\frac{2}{4}$

j) $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$

l) $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$

m) $\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$

n) $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}$

o) $\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}$

p) $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$

q) $\frac{1}{3}:\frac{1}{6}$

r) $\frac{1}{2}:\frac{2}{4}$

s) $\frac{1}{4}:\frac{3}{4}$

t) $\frac{1}{3}:\frac{1}{6}$

u) $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}$

- Desenhe um quadrado medindo 4 cm de lado e responda as alternativas abaixo esquematizando geometricamente:

a) Qual a área do quadrado?

b) Ao dividir um quadrado de 4 cm de lado em 5 partes iguais. Qual será a área de cada parte?

**88.** João, ao comprar uma barra de chocolate, fica curioso em saber que forma geométrica ela apresenta. Ao pesquisar descobre que as superfícies das faces da barra de chocolate são quadradas e que medem 25 cm² de área cada uma. Pergunta-se:

a) Quanto mede cada aresta da barra de chocolate?

b) João decide dividir a barra de chocolate para 5 colegas em partes iguais. De quanto será a área de cada parte?

c) Que forma geométrica apresenta cada parte?

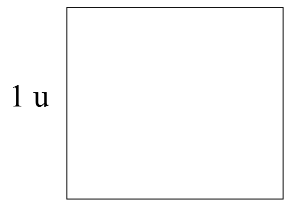
**89.** Construa um quadrado de lado unitário e responda as seguintes perguntas:

a) Ao dividir o lado do quadrado em 3 partes iguais e o seu lado adjacente em 2 partes também iguais, quais são as novas figuras geométricas obtidas?

b) Qual a área de cada figura geométrica obtida no cruzamento das divisões dos lados?

c) Com base no item **a)**, represente, geometricamente, a soma $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$ do quadrado dividido.

**90.** Dado o quadrado abaixo:




a) Divida o lado do quadrado em 3 partes iguais e o seu lado adjacente em 6 partes iguais, diga qual as medidas das áreas dos retângulos obtidos.

b) Quantas vezes 1/6 está contido em 1/3 ?

**91.** Construa um quadrado unitário e responda geometricamente cada item abaixo:

a) Divida o lado do quadrado em 3 partes iguais e o seu lado adjacente em 5 partes iguais.

b) Qual a área de cada retângulo obtido?

c) Qual a área do retângulo de dimensões 2/3 e 4/5?

d) Qual a área do retângulo de dimensões 1/3 e 1/5?

**92.** Em um terreno retangular será construída uma casa, onde a sala também de forma retangular ocupará 2/5 do terreno. Qual a fração correspondente do que sobrou do terreno? Esquematize o resultado em forma geométrica.

**93.** Em uma turma da EJA (Educação de Jovens e Adultos), entre os alunos, 1/4 são mulheres adultas e 2/3 são homens adultos. Qual será a fração correspondente aos alunos jovens? Dê o resultado geometricamente.

**94.** Em uma fazenda, 2/3 serão destinados à criação de porcos e 1/5 à criação de bois. Qual a fração que corresponde ao total do terreno que foi destinado às criações de porcos e bois? Apresente o resultado geometricamente.

## OUTROS TEMAS

**95.** Para construir um painel, um grupo de alunos da 6ª série irá utilizar um pedaço de compensado retangular, de 60 cm de largura por 1,2 m de comprimento. O painel será todo revestido com recortes de cartolinas coloridas, em forma de quadrado. Responda:

a) Qual a área do painel?

b) Quantos recortes de cartolina com área de 100 cm² cada serão necessários para cobrir todo o painel?

c) Se os recortes de cartolina forem quadrados de lado igual a 30 cm, quantos pedaços de cartolina serão necessários para completar totalmente o painel?

**96.** Um jardim de forma retangular mede 15 m por 5 m, quantas placas quadradas de grama serão necessárias para cobrir todo o jardim, se cada placa tem 1,5 m² de área?

**97.** Um banheiro retangular que tem 2 m de largura, 3,50 m de comprimento e 2,70 m de altura vai entrar em reformas. Quantos azulejos quadrados de 15 cm de lado serão necessários para forrar as paredes, considerando que a porta e a janela ocupam 2,5 m² de área?

**98.** O piso de dois quartos e de uma sala vai ser forrado com lajotas retangulares de 20 cm por 30 cm cada uma. Os quartos são retangulares, um deles mede 4 m por 3 m, o outro mede 3 m por 3,5 m. A sala é um quadrado de 4 m de lado. Quantas lajotas serão necessárias para forrar os quartos e a sala?

**99.** A caixa d'água do prédio onde Jane mora tem a forma de um bloco retangular com 8 m de comprimento, 6 m de largura e 2 m de altura. Quantos litros de água há na caixa, se ela está com 30% de sua capacidade ocupada?

**100.** Uma vídeo-locadora aluga fitas de vídeo no final de semana, cobrando o preço da tabela abaixo:

| Número de fitas | Preço R$ |
|---|---|
| 1 | 3,00 |
| 2 | 5,00 |
| 3 | 7,00 |
| 4 | 10,00 |
| 5 ou mais | 2,00 cada fita. |

Responda, com base na tabela:

a) Qual o valor a ser pago no aluguel de 12 fitas?

b) Qual será o preço no aluguel de 4 fitas?

d) Qual a porcentagem de desconto, em relação ao preço de cada fita, se uma pessoa alugar 3 fitas?

**101.** Na revelação de um filme, uma loja de fotografia cobra por foto revelada R$ 0,50. Responda:

a) Quanto uma pessoa pagará se forem reveladas 18 fotos do seu filme?

b) Se uma pessoa pagar uma quantia de R$ 38,00, pela revelação, qual o total de fotos reveladas?

**102.** Um revendedor de cartões telefônicos compra da empresa Sinetel as seguintes quantidades de cartões:

| Nome do produto | Quantidade | Preço unitário |
|---|---|---|
| Cartão de 60 créditos | 60 | 6,00 |
| Cartão de 40 créditos | 50 | 4,04 |
| Cartão de 20 créditos | 10 | 2,61 |

Responda:

a) Supondo que o revendedor venda todos os cartões de 60 créditos por R$ 6,50 cada, de 40 créditos por R$ 4,80 cada e o de 20 créditos por R$ 3,50 cada, de quanto será seu lucro total?

b) Quantos percentuais o vendedor ganha em cima do preço de venda de um cartão de 40 créditos?

c) Vendendo todos os cartões telefônicos, qual o seu lucro em percentual?

d) Qual seu lucro vendendo todos os cartões de 40 créditos?

e) Em qual venda dos dois cartões o seu lucro é maior?

f) Se em um mês o revendedor vende 130 cartões de 60 créditos, qual seria seu lucro?

g) Quanto vale cada unidade nos cartões de 60, 40 e de 20 créditos?

**103.** Uma sala quadrada de $16m^2$ e um tapete também quadrado que ocupa o centro dessa sala mede $156dm^2$. Qual a razão entre a área do tapete e a área da sala? Calcule a parte que sobra entre a sala e o tapete?

**LEITURA RECOMENDADA**

**1 - NIVEN, Ivan Morton. Números: Racionais e Irracionais. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.**

**2 - LAGES, Elon Lima. Medida e Forma em Geometria. Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.**

**3 - REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, Sociedade Brasileira de Matemática.**

**Coordenação Editorial**
Oneide Campos Pojo

**Editoração Eletrônica**
Odivaldo Teixeira Lopes

**Arte final da Capa**
Nelson Duarte Faro Júnior
Ruan Carlos Sasaki Brito

**Revisão**
Natasha de Queiroz Almeida

**Contato:**
Endereço: Av. Augusto Correa, nº 01 Guamá - Belém - Pará
CEP: 66075-110
Fone: (91) 3201-7487 / 3201-7642 / 3201-8070

Site: www.ufpa.br/npadc
e-mail: npadc@ufpa.br

**Realização**

Universidade Federal do pará

Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica
Rede Nacional de Formação Continuada de Professores de Educação Básica (MEC-SEB)

**Financiamento**

**Parcerias**

Governo
Federal
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

ISBN 85-247-0292-3
Obra completa Educimat

ISBN 85-247-0317-2
9 788524 703171